① (1) 一致するのは $a=c$ かつ $b=d$ のとき、

$$1\times\frac{1}{6}\times1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

(2) l_1とl_2が平行になったとき、交点は存在しないか、l_1とl_2が一致する

したがって、l_1とl_2が一点で交わるのは $a\neq c$ のとき、

$$1\times\frac{5}{6}\times1\times1=\frac{5}{6}$$

(3) $a\neq c$のとき、l_1とl_2の交点は

$$ax+b=cx+d \quad より$$

$$x=\frac{d-b}{a-c}\ \cdots ①$$

交点のx座標が整数値をとったとき、l_1の式は $y=ax+b$ だから、y座標も整数値をとる($\because$ a, bは整数)

よって、交点のx座標およびy座標が整数値をとるのは $a\neq c$ かつ、①が整数値をとるときである。

$a-c$ の値は右のようになり、

$d-b$についても同様。

a \ c	1	2	3	4	5	6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0

(i) $|a-c|=1$のときは $b-d$は任意

(ii) $|a-c|=2$ 〃 $|b-d|=2$または4または0

(iii) $|a-c|=3$ 〃 $|b-d|=3$または0

(iv) $|a-c|=4$ 〃 $|b-d|=4$または0

(v) $|a-c|=5$ 〃 $|b-d|=5$、または0

以上より、もとめる確率をPとして

$$P=\underset{(i)}{\frac{10}{36}\times1}+\underset{(ii)}{\frac{8}{36}\times\frac{16}{36}}+\underset{(iii)}{\frac{6}{36}\times\frac{12}{36}}+\underset{(iv)}{\frac{4}{36}\times\frac{10}{36}}+\underset{(v)}{\frac{2}{36}\times\frac{8}{36}}$$

$$=\frac{1}{36^2}(360+144+72+40+16)=\frac{632}{36^2}=\frac{158}{36\times9}=\frac{79}{18\times9}=\frac{79}{162}$$

② (1) C_2 の式より x の定義域は $x \geqq a$.

$k \leqq 0$ のとき、C_2 の y 座標は 0 以下となるので、C_1 と共有点をもつことはない。$\therefore k > 0$

$k > 0$ のとき、

$$e^x = k\sqrt{x-a} \text{ の両辺を2乗して、}$$

$$e^{2x} = k^2(x-a) \quad \cdots ①$$

$x = a$ のとき $e^{2a} \neq 0$ だから上式は成立しない。

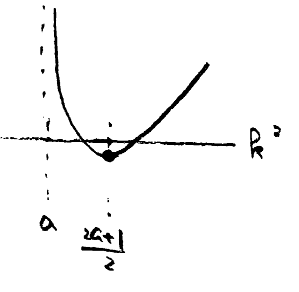
$x > a$ のとき ① は

$$\frac{e^{2x}}{x-a} = k^2$$

と変形できる。この式の左辺を $f(x)$ とおく。

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(2x-2a-1)}{(x-a)^2}$$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{2a+1}{2}$ のときで $\frac{2a+1}{2} = a + \frac{1}{2} > a$ だから これは必ず $x > a$ の範囲に含まれる。したがって ① が解をもつ条件は



$$f\left(\frac{2a+1}{2}\right) \leqq k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2e^{2a+1} \leqq k^2$$

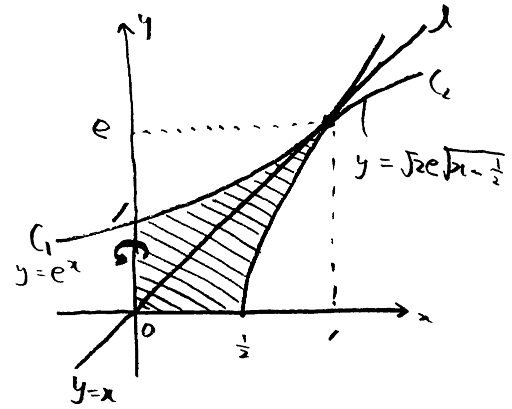
$$\Leftrightarrow \quad k \geqq \sqrt{2}\, e^{a+\frac{1}{2}} \qquad (\because k \geqq 0)$$

よって、C_1 と C_2 が共有点をもつ条件は $\underline{k \geqq \sqrt{2}\, e^{a+\frac{1}{2}}}$ //

(2) C_1 は下に凸、C_2 は上に凸 なので、C_1 と C_2 が P において同一の直線に接するとき、C_1 と C_2 は P で接している。(1) より、C_1 と C_2 が唯1つの共有点をもつときの条件は $k = \sqrt{2}\, e^{a+\frac{1}{2}}$, $t = \frac{2a+1}{2}$

$$\Leftrightarrow \underline{a = \frac{2t-1}{2}, \quad k = \sqrt{2}\, e^t} //$$

(3) l は、$y = e^t(x-t) + e^t$ で、これが原点を通るとき、$0 = e^t - te^t$ より、$t = 1$.



このとき、$a=\frac{1}{2}$, $k=\sqrt{2}e$

もとめる立体の体積をVとする

$$V=\int_0^e \pi x^2\,dy-\int_1^e \pi x^2\,dy$$

$$y=e\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow x=\frac{y^2}{2e^2}+\frac{1}{2}$$

$$y=e^x \Leftrightarrow x=\log_e y$$

$$V=\int_0^e \pi\left(\frac{y^2}{2e^2}+\frac{1}{2}\right)^2 dy-\int_1^e \pi(\log y)^2\,dy$$

$$=\pi\int_0^e \frac{y^4}{4e^4}+\frac{y^2}{2e^2}+\frac{1}{4}\,dy-\pi\left[y(\log y)^2\right]_1^e+\pi\times\int_1^e 2\log y\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^5}{20e^4}+\frac{y^3}{6e^2}+\frac{1}{4}y\right]_0^e-\pi(e-0)+2\pi\left[y\log y-y\right]_1^e$$

$$=\pi\left(\frac{e}{20}+\frac{e}{6}+\frac{e}{4}\right)-e\pi+2\pi$$

$$=2\pi-\frac{8}{15}e\pi$$

③　$(c,0),(0,c)$ を通る直線は $y=-x+c$ …①

これとだ円の式が接するので連立すると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-x+c)^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)x^2-\frac{2c}{b^2}x+\frac{c^2}{b^2}-1=0$$

この判別式をDとして

$$D/4=\left(\frac{c}{b^2}\right)^2-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2=c^2 \quad \text{…②}$$

このとき

だ円Cは、x軸、およびy軸について対称なので、正方形の他の辺にも接する。

①とだ円の接点は　$x=\dfrac{\frac{c}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\dfrac{a^2\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ より $(x,y)=\left(\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

だから、

$$S=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\times 2\times\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\times 2=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$$

また　$T=\pi ab$

$$\frac{2}{\pi}-\frac{S}{T}=\frac{2}{\pi}-\frac{\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}}{\pi ab}=\frac{2}{\pi}-\frac{4ab}{\pi c^2}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2ab}{c^2}\right)$$

ここで②と相加相乗の公式より

$$a^2+b^2\geqq 2\sqrt{a^2b^2}\Leftrightarrow c^2\geqq 2ab \Leftrightarrow \frac{2ab}{c^2}\leqq 1$$

（等号は $a^2=b^2$ のとき）

が成り立つので $1-\dfrac{2ab}{c^2}\geqq 0$

よって $\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{S}{T}\geqq 0$ すなわち $\dfrac{S}{T}\leqq\dfrac{2}{\pi}$ が成立する

等号は $a^2=b^2$ のとき、すなわちCが $x^2+y^2=a^2=\frac{1}{2}c^2$ の円となるとき、である。

④ (1) $\ell:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ (tは任意の実数)

$m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1+6\\2-6\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$ (sは任意の実数)

P.Qは P: $p\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ Q: $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$ と表せる. (p.qは実数)

$\overrightarrow{PQ}\perp\ell$より $\begin{pmatrix}1+7q-p\\2-4q-p\\1+q+3p\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}=0 \iff p=0$

$\overrightarrow{PQ}\perp m$より $\begin{pmatrix}1+7q-p\\2-4q-p\\1+q+3p\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}=0 \iff q=0.$

$\therefore \overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\therefore$ $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{6}$

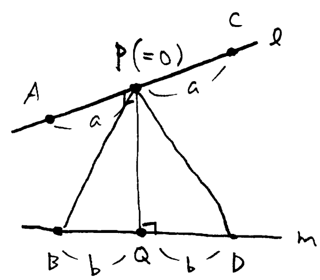
(2) (1)より $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ (O=P)

Aを $a\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$, Bを $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$ とする (aは $a\neq0$ を満たす実数, bは実数)

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}a\\a\\-3a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+7b\\2-4b\\1+b\end{pmatrix}=a+7ab+2a-4ab-3a-3ab=0$

よって $\angle APB=\frac{\pi}{2}$ である.

(3) 右図より



$\triangle BDP=\frac{1}{2}\times PQ\times BD=\frac{1}{2}\sqrt{6}\times2b=\sqrt{6}b$

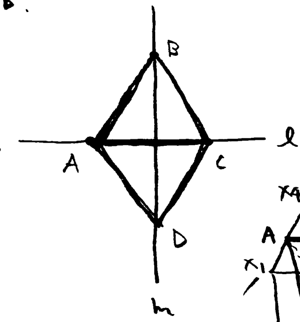
四面体ABCDは右下のように3辺の長さが

$\sqrt{6}$, $2a$, $2b$ の直方体に収まっている

直方体の頂点を $X_1\sim X_8$ として.

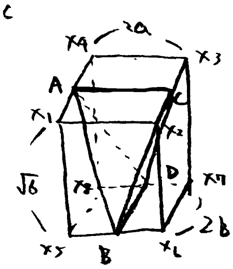
$X_1X_5B-X_4X_8D$ の三角柱の体積は $\frac{1}{2}a\sqrt{6}\times2b=\sqrt{6}ab$.

$X_2X_6B-X_3X_7D$ 〃 $\sqrt{6}ab$



ACX_1X_2-B の四角錐の体積は $2a\cdot b\cdot\sqrt{6}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{6}ab$

ACX_3X_4-D 〃 $\frac{2}{3}\sqrt{6}ab$.



よってABCDの体積Vは

$$V=\sqrt{6}\times2a\times2b-\sqrt{6}ab\times2-\frac{2}{3}\sqrt{6}ab\times2=\frac{2}{3}\sqrt{6}ab$$