① (1) 真数条件より $x>0,\ 3x-8>0$ $\therefore\ x>\frac{8}{3}$

条件式より $x(3x-8)=3$

$3x^2-8x-3=0$ $x=3,\ -\frac{1}{3}$ $\therefore\ \underline{x=3}$

(2) $z\bar{z}=9,$ $(z+4)(\bar{z}+4)=16 \Leftrightarrow z\bar{z}+4(z+\bar{z})=0$

$\therefore\ \underline{z\bar{z}=9,\ z+\bar{z}=-\frac{9}{4}}$

(3) 与式 $=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{9}{x}\right)=x^2+10+\frac{9}{x^2} \geqq 10+2\sqrt{x^2\cdot\frac{9}{x^2}}=\underline{16}$

等号は $x^2=\frac{9}{x^2}$ すなわち $x=\underline{\sqrt{3}}$ のとき.

(4)

$$(x^2-x+1)^{20}=\sum_{p+q+r=20}\left\{\frac{20!}{p!\,q!\,r!}(x^2)^p(-x)^q\right\}$$

$q=1,\ p=0$ のとき $r=19$ となるので x の係数は

$$\frac{20!}{1\times1\times19!}(-1)^1=\underline{-20}$$

$p=0,\ q=2,\ r=18$ または $p=1,\ q=0,\ r=19$

$$\frac{20!}{1\times2!\times18!}(-1)^2+\frac{20!}{1\times1\times19!}=10\times19+20=\underline{210}$$

(5)

$$\begin{array}{rl} & a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n^3 \\ -) & a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^3 \\ \hline & a_n=3n^2-3n+1 \quad (n\geqq2) \end{array}$$

仮に $n=1$ とすると $a_1=3-3+1=1=1^3$ となるので $n=1$ でも成り立つ

$$\sum_{k=1}^{n}a_{3k}=\sum_{k=1}^{n}\left\{3(3k)^2-3(3k)+1\right\}=\sum_{k=1}^{n}27k^2+\sum_{k=1}^{n}(1-9k)$$

$$=\frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\underset{2}{\cancel{6}}}\times n(n+1)(2n+1)+\frac{-8+1-9n}{2}\times n=\frac{n}{2}\left(9(n+1)(2n+1)-9n-7\right)$$

$$=n(9n^2+9n+1)$$

② (1) $1+\tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ より、 $\dfrac{1}{1+\tan^2 t} = \underline{\cos^2 t}$

(2) $x=\tan t$ より $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

x	$0 \to 1$
t	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\tan^2 t}dx = \int_0^1 \cos^2 t\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \times \left(\frac{dx}{dt}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \Big[t \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\frac{\pi}{4}}$$

(3) $$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x'}{1+x^2}dx = \left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} = \underline{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$$

だから、

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = \underline{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}}$$

(4) 与えられた等式より

$$x^3 + 2x^2 + x = ax^3 + bx^2 + ax + b + cx + d$$

これが恒等的に成り立つので

$$a=1,\quad b=2,\quad a+c=1,\quad b+d=0$$

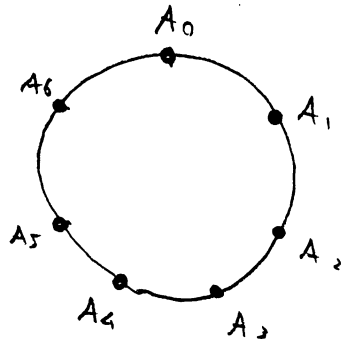
$$\Leftrightarrow \underline{(a, b, c, d) = (1, 2, 0, -2)}$$

したがって

$$\int_0^1 \frac{x(1+x)^2}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^1 \frac{x+2}{1+x^2} + \frac{-2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx - 2\int_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\log|1+x^2|\Big]_0^1 + 2\times\frac{\pi}{4} - 2\times\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

③



(1) 2回で止まるのは、2回目にA_0に止まるときのみで、その場合、2回のさいころの目の合計は 7.

$(1,6),(2,5)\cdots(6,1)$ の 6通り

n回で止まるときの確率をP_nと表すと

$$P_2 = \frac{6}{6^2} = \underline{\frac{1}{6}} \quad (ア)$$

3回で止まるとき

1回目は任意，2回目はA_0以外，3回目はA_0と1回目に止まった点に止まればよい

$$P_3 = \frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{6} = \underline{\frac{5}{18}} \quad (イ)$$

6回目も先と同様、

$$P_6 = \frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{5}{6} = \underline{\frac{25}{324}} \quad (ウ)$$

(2)

(i) A_0以外の点からA_0に移るのは、いずれも$\frac{1}{6}$.

逆に、A_0以外の点から、A_0以外の点に移るのは$\frac{5}{6}$.

n回目に終了する確率をq_nとすると

$$q_3 = \frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \underline{\frac{5}{36}} \quad (エ)$$

$$q_2 = \frac{6}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{6}{36} \text{ なので、} \quad q_2 + q_3 = \underline{\frac{11}{36}} \quad (オ)$$

$n \geqq 2$のとき

$$q_n = \frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \underline{\frac{5^{n-2}}{6^{n-1}}} \quad (カ)$$

(ii) 4回で終了するのは

$6 \times 5 \times 5 \times 1$　このうち、1周で終了するのは4回の和が7のときで、

○∧○∧○∧○∧○∧○∧○　　${}_6C_3 = 20$通り

3周で終了するのは和が $7 \times 3 = 21$のとき、

4回の目を a_1, a_2, a_3, a_4 （すべて 1〜6）とすると

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 21$

$\Leftrightarrow \quad (7-a_1) + (7-a_2) + (7-a_3) + (7-a_4) = 7$

これらの数字の選び方は先と同じで $_6C_3 = 20$

$\therefore \quad 6 \times 5 \times 5 - 20 - 20 = \underline{110}$