(1) $f_1(1) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt$

$t = \tan\theta$ とすると. $\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$, $\begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{4} \end{array}$

$f_1(1) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1} \times \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\frac{\pi}{4}}$

(2) $g(x) = f_1\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t^2+1}dt$

$g'(x) = \frac{d}{dx} f_1\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1} \times \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2}{1+x^2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2+1}$

したがって $f_1(x) + g(x) = \int \frac{1}{t^2+1} dx + \int g'(t)dt + C$

$= \int \frac{1}{t^2+1}dt + \int \frac{1}{t^2+1}dt + C = C$

ここで $x=1$ のとき

$f_1(1) = \frac{\pi}{4}$, $g(1) = f_1\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$ だから

$f_1(1) + g(1) = C$ とあわせて $C = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $f_1(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$ 証明終

(3) $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t^2+1}dt = \lim_{\theta\to 0} \int_0^{\theta} \frac{1}{t^2+1}dt = 0$

よって $\lim_{x\to\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right) = \underline{\frac{\pi}{2}}$

(4) $f_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^n}(t)'dt$

$= \left[t \frac{1}{(t^2+1)^n}\right]_0^x + \int_0^x t \frac{n}{(t^2+1)^{n+1}} \times 2t\, dt$

$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int_0^x \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{n+1}}dt$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^n}dt - 2n\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}dt$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n f_n(x) - 2n f_{n+1}(x)$$

証明終

(5) (4) より $f_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n} f_n(x) + \frac{2nx}{(x^2+1)^n}$

$n \geqq 2$ のとき

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty}\left\{ \frac{2n-3}{2n-2} f_{n-1}(x) + \frac{2(n-1)x}{(x^2+1)^{n-1}} \right\}$$

$$= \frac{2n-3}{2n-2}\lim_{x\to\infty} f_{n-1}(x) + 2(n-1)\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n-2}} \times \frac{1}{x+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{2n-3}{2n-2}\lim_{x\to\infty} f_{n-1}(x)$$

$$= \frac{2n-3}{2n-2} \times \frac{2n-5}{2n-4}\lim_{x\to\infty} f_{n-2}(x)$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots \times 3 \times 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots \times 4 \times 2}\lim_{x\to\infty} f_1(x)$$

$$= \frac{(2n-3)!}{2^{n-1}(n-1)!\,(2n-4)(2n-6)\cdots \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n-3)!}{2^{2n-3}(n-1)!\,(n-2)!} \times \frac{\pi}{2} = (*)$$

ここで ${}_{2n-3}C_{n-1} = \frac{(2n-3)!}{(n-1)!\,(2n-3-n+1)!} = \frac{(2n-3)!}{(n-1)!\,(n-2)!}$ だから

$$(*) = {}_{2n-3}C_{n-1} \times \frac{\pi}{2^{2n-2}}$$

$$= \frac{{}_{2n-3}C_{n-1}}{2^{2n-2}}\pi$$

証明終

②

(1) (i)

$x=y=0$ とすると

$$f(0+0)=pf(0)+qf(0)$$

$f(0)\neq 0$ なので両辺を $f(0)$ で割って、

$$1=p+q$$

証明終

(ii) $y=0$ とすると、

$$f(x+0)=pf(x)+qf(0)$$

$$(1-p)f(x)=qf(0)$$

$$qf(x)=qf(0) \qquad (\because p+q=1)$$

$q\neq 0$ のとき、 $f(x)=f(0)$ となり $f(x)$ は定数関数.

また $q=0$ のとき、

$p=1$ となるが、このとき条件は、

$$f(x+y)=f(x)$$

ここで $\substack{x=0\\ y=x}$ とすると $f(x)=f(0)$ となるので、$f(x)$ は定数関数となる.

以上より $f(x)$ は定数関数 (その値は $f(0)$).

(2) (i) $y=0$ とすると

$$f(x+0)=pf(x)+qf(0)$$

$f(0)=0$ なので

$$f(x)=pf(x)$$

ここで $p\neq 1$ のとき $f(x)=0$ となるが、これは $f(x)$ が定数関数でないことに矛盾する.

よって $p=1$ である.

証明終

(ii) (2)(i) と同様に $x=0$ とすることで $g=1$ を示せる.

よって $f(x+y)=f(x)+f(y)$ …①

導関数の定義より

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h} \quad \left(\because \text{①より } f(x+h)=f(x)+f(h)\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

$$=a \quad \left(\because f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)$$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int a\,dx=ax+C$ （Cは積分定数）

$f(0)=a\times 0+C=0$ だから, $C=0$.

以上より $\underline{f(x)=ax}$

⑤ (1)

上式右辺 $= \dfrac{1}{2}\left\{-\sin\left(k\theta - \dfrac{1}{2}\theta\right) + \sin\left(k\theta + \dfrac{1}{2}\theta\right)\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left(-\sin k\theta\cos\frac{1}{2}\theta + \cos k\theta\sin\frac{1}{2}\theta + \sin k\theta\cos\frac{1}{2}\theta + \cos k\theta\sin\frac{1}{2}\theta\right)$$

$= \sin\dfrac{1}{2}\theta\cos k\theta$ = 左辺

下式右辺 $= \dfrac{1}{2}\left\{\cos\left(k\theta - \dfrac{1}{2}\theta\right) - \cos\left(k\theta + \dfrac{1}{2}\theta\right)\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos k\theta\cos\frac{1}{2}\theta + \sin k\theta\sin\frac{1}{2}\theta - \cos k\theta\cos\frac{1}{2}\theta + \sin k\theta\sin\frac{1}{2}\theta\right)$$

$= \sin\dfrac{1}{2}\theta\sin k\theta$ = 左辺.

証明終

(2) $n \geqq 1$ のとき.

$(1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta) \times \sin\dfrac{\theta}{2}$

$$= \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\theta + \cdots + \sin\frac{\theta}{2}\cos n\theta$$

$$= \sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + \cancel{\sin\frac{3}{2}\theta}\right) + \frac{1}{2}\left(-\cancel{\sin\frac{3}{2}\theta} + \cancel{\sin\frac{5}{2}\theta}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(-\cancel{\sin\frac{2n-3}{2}\theta} + \cancel{\sin\frac{2n-1}{2}\theta}\right) + \frac{1}{2}\left(-\cancel{\sin\frac{2n-1}{2}\theta} + \sin\frac{2n+1}{2}\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{2n+1}{2}\theta$$

$0 < \theta < \pi$ だから. $\sin\dfrac{\theta}{2} \neq 0$ であり. 上の式を $\sin\dfrac{\theta}{2}$ で割ると

$$1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left\{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) + \sin\frac{\theta}{2}\right\}$$

が成り立つことが示された.

同様に

$(\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta) \times \sin\dfrac{\theta}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2}\theta - \cancel{\cos\frac{3}{2}\theta}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\cos\frac{3}{2}\theta} - \cancel{\cos\frac{5}{2}\theta}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{2}\left\{\cancel{\cos\left(\frac{2n-3}{2}\theta\right)} - \cancel{\cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right)}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\cancel{\cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right)} - \cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)\right\}$$

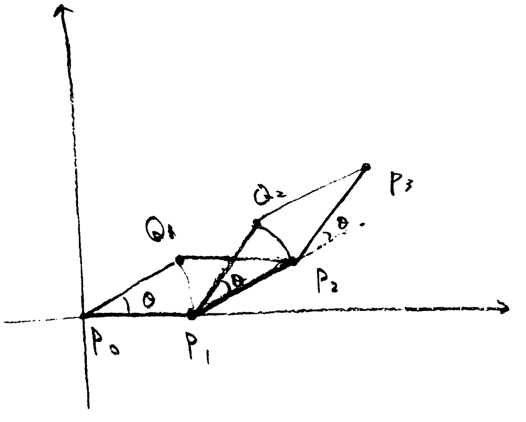
$$= \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)$$

$\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$ だから

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left\{-\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) + \cos\frac{\theta}{2}\right\}$$

が成り立つことが示された

(3) Q_n は P_n を P_{n-1} を中心に θ 回転させた点だから



$$|\overrightarrow{P_{n-1}P_n}| = |\overrightarrow{P_{n-1}Q_n}| \quad \cdots ①$$

また

$$\overrightarrow{P_{n-1}Q_n} = \overrightarrow{P_nP_{n+1}}$$

より

$$|\overrightarrow{P_{n-1}Q_n}| = |\overrightarrow{P_nP_{n+1}}| \quad \cdots ②$$

①, ②より $|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}| = |\overrightarrow{P_{n-1}P_n}| = \cdots = |\overrightarrow{P_0P_1}| = 1$

よって $|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}| = 1$

また、$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ の偏角は $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ よりも θ だけ大きいので、

$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ の偏角は $n\theta$.

以上より

$$\overrightarrow{P_nP_{n+1}} = (\cos n\theta,\ \sin n\theta)$$

$n \geqq 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_n} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \cdots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta \\ \sin(n-1)\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left\{-\sin\left(\dfrac{2n-1}{2}\theta\right) + \sin\dfrac{\theta}{2}\right\} \\ \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left\{-\cos\left(\dfrac{2n-1}{2}\theta\right) + \cos\dfrac{\theta}{2}\right\} \end{pmatrix}$$

これは $n=0$ のときも成り立つ。

(4) (3) より

$$\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)x_n - \sin\frac{\theta}{2} = -\sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) \quad \cdots ③$$

$$\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)y_n - \cos\frac{\theta}{2} = -\cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right) \quad \cdots ④$$

③と④の両辺を平方したものの和をとると

$$\left\{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)x_n - \sin\frac{\theta}{2}\right\}^2 + \left\{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)y_n - \cos\frac{\theta}{2}\right\}^2 = 1$$

$$\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_n - \frac{1}{2\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2 = \frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

この結果から (x_n, y_n) は n の値にかかわらず

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

上に存在することが分かり、そのような円が唯1つしか存在しないことは明らかなので、これが、もとめる円である。

⑤について、

偏角θ、大きさ1の複素数をω

P_nに対応する複素数をz_nと表すと（$z_0=0$、$z_1=1$）

$$z_n - z_{n-1} = \omega(z_{n-1} - z_{n-2})$$

$$= \cdots = \omega^{n-1}(z_1 - 0)$$

よって $z_n = z_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \omega^k z_1$

$$= z_1 + z_1\omega + z_1\omega^2 + \cdots + z_1\omega^{n-1}$$

$$= 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}$$

$$= \frac{1-\omega^n}{1-\omega}$$

$$= \frac{1-\cos n\theta - i\sin n\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta}$$

$$= \frac{(1-\cos n\theta - i\sin n\theta)(1-\cos\theta + i\sin\theta)}{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$$

⋮

このように複素数を用いることで、(1)(2)のような誘導なしに、計算をすすめることができ、複素数の問題としても、有名な問題パターンとして、出題されている