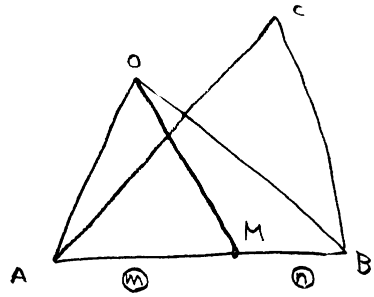
①



(1)

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OA}|^2$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}}{m+n}$$

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = \frac{1}{(m+n)^2}\left(m^2|\overrightarrow{OB}|^2 + 2mn\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + n^2|\overrightarrow{OA}|^2\right)$$

$$= \frac{n^2|\overrightarrow{OA}|^2 + 2mn\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + m^2|\overrightarrow{OB}|^2}{(m+n)^2}$$

(2) (1)より、

$$|\overrightarrow{OM_1}|^2 = \frac{1}{(m+n)^2}\left(n^2|\overrightarrow{OA}|^2 + 2mn\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + m^2|\overrightarrow{OB}|^2\right) \quad \cdots ①$$

$$|\overrightarrow{OM_2}|^2 = \frac{1}{(m+n)^2}\left(n^2|\overrightarrow{OB}|^2 + 2mn\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + m^2|\overrightarrow{OC}|^2\right) \quad \cdots ②$$

$$|\overrightarrow{OM_3}|^2 = \frac{1}{(m+n)^2}\left(n^2|\overrightarrow{OC}|^2 + 2mn\,\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} + m^2|\overrightarrow{OA}|^2\right) \quad \cdots ③$$

① + ② + ③

$$|\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2 = \frac{1}{(m+n)^2}\left\{(n^2+m^2)\left(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2\right) + 2mn\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\right)\right\} \quad \cdots ④$$

また(1)より、

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 \quad \cdots ⑤$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2 \quad \cdots ⑥$$

$$|\overrightarrow{CA}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} + |\overrightarrow{OA}|^2 \quad \cdots ⑦$$

⑤+⑥+⑦ より

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2 = 2\left(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2\right) - 2\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\right) = 2\left(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2\right) - \left(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2\right) \quad \cdots ⑧$$

⑧を④に代入、

$$|\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2 = \frac{1}{(m+n)^2}\left\{(n^2+m^2)\left(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2\right) + 2mn\left(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2\right) - mn\left(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}\right.\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2 = \frac{1}{(m+n)^2}\left\{(m+n)^2\left(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2\right) - mn\left(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2\right)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 = \frac{mn}{(m+n)^2}\left(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2\right) + |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2$$

証明終

(3) $\dfrac{mn}{(m+n)^2} = \dfrac{mn}{m^2+2mn+n^2} = \dfrac{1}{\frac{m}{n}+2+\frac{n}{m}}$

ここで相加相乗平均の公式より、

$\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m} \geqq 2\sqrt{\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{n}{m}} = 2$ となるので、

$\dfrac{1}{\frac{m}{n}+2+\frac{n}{m}} \leqq \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$ （等号は $m=n$ のとき）

(2) の結果と、上の関係を用いて、

$$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OM_1}|^2-|\overrightarrow{OM_2}|^2-|\overrightarrow{OM_3}|^2$$

$$= \frac{mn}{(m+n)^2}\left(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2\right)$$

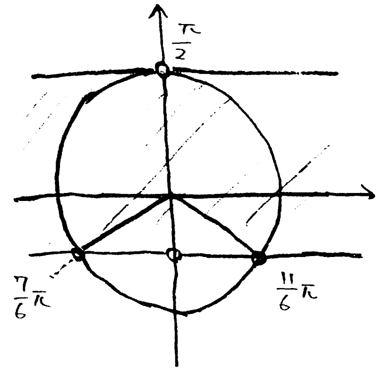
$$\leqq \frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2\right)$$

以上より、$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OM_1}|^2-|\overrightarrow{OM_2}|^2-|\overrightarrow{OM_3}|^2$ の最大値は

$\dfrac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2\right)$ である （$m=n$ のとき）

②

(1) $\sin\pi x + \cos 2\pi x > 0$



$\Leftrightarrow \sin\pi x + 1 - 2\sin^2\pi x > 0$

$\Leftrightarrow (2\sin\pi x + 1)(\sin\pi x - 1) < 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \sin\pi x < 1 \quad \cdots ①$

$0 \leqq x \leqq 2$のとき $0 \leqq \pi x \leqq 2\pi$ なので ①を満たすxの範囲は

右上図より $\underline{0 \leqq x < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < x < \frac{7}{6},\ \frac{11}{6} < x \leqq 2}$ //

(2) 真数条件より

$3+x>0,\ 5-x>0,\ 16-k>0$

$\Leftrightarrow -3<x<5,\ k<16.$

条件式より

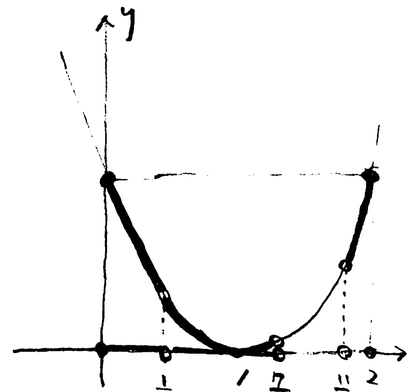
$\log_2(3+x)(5-x) = \log_2(16-k)$

$-x^2+2x+15 = 16-k$

$x^2-2x+1 = k \quad \cdots ②$

ここで $x^2-2x+1 = f(x)$ と表すと、②の解は

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = k \end{cases}$



の2つのグラフの交点のx座標と等しい。

(1)のxの範囲を考えて、グラフを書き、交点を調べる

$f(\frac{11}{6}) = \frac{25}{36},\ f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4},\ f(\frac{7}{6}) = \frac{1}{36}$

となるので、グラフより $y=f(x)$ と $y=k$ が (1)のxの範囲で唯1つの交点を持つのは、

$k = f(1),\quad f(\frac{7}{6}) \leqq k < f(\frac{1}{2}),\quad f(\frac{1}{2}) < k < f(\frac{11}{6})$

$\Leftrightarrow k=0,\ \frac{1}{36} \leqq k < \frac{1}{4},\ \frac{1}{4} < k < \frac{25}{36}$

のときで、これらは真数条件を満たしている。

$\therefore \underline{k=0,\ \frac{1}{36} \leqq k < \frac{1}{4},\ \frac{1}{4} < k < \frac{25}{36}}$ //

③ (1) $a=\sqrt{2}+1$, $b=2\sqrt{2}-2$ とすると

$$ab=(\sqrt{2}+1)\times 2(\sqrt{2}-1)=2(2-1)=2.$$

となり、abは有理数であるが

$$(a+b)^2=(\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}-2)^2=(3\sqrt{2}-1)^2=18-6\sqrt{2}+1=19-6\sqrt{2}$$

となるので、$(a+b)^2$は有理数ではない。

よって主張は誤りである。(反例は $a=\sqrt{2}+1$, $b=2\sqrt{2}-2$)

(2) abが有理数であるとき互いに素な正の自然数 m_1, n_1 を用いて

$$ab=\frac{n_1}{m_1}$$

と表すことができる(条件より a, bはともに正なので)。

同様に $bc=\dfrac{n_2}{m_2}$, $ca=\dfrac{n_3}{m_3}$

と表すことができる。このとき、

$$a^2=\frac{ab\times ac}{bc}=\frac{\frac{n_1}{m_1}\times\frac{n_3}{m_3}}{\frac{n_2}{m_2}}=\frac{n_1n_3m_2}{m_1m_3n_2}$$

と表せるが、これは a^2が有理数であることを示している　証明終

同様に $b^2=\dfrac{ab\times bc}{ac}=\dfrac{\frac{n_1}{m_1}\times\frac{n_2}{m_2}}{\frac{n_3}{m_3}}=\dfrac{n_1n_2m_3}{m_1m_2n_3}$

$$c^2=\frac{ca\times bc}{ab}=\frac{n_2n_3m_1}{m_2m_3n_1}$$

となり、b^2, c^2も有理数だから

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

において、右辺の各項は全て有理数である。

よって $(a+b+c)^2$は有理数であることが示された。　証明終

(3) $a+b+c=\dfrac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}$ であり、条件および(2)より $a+b+c$ も有理数

したがって

$a+b+c=\dfrac{n}{m}$ と表せる（m, nは互いに素な自然数）

$\Leftrightarrow\ a+b=\dfrac{n}{m}-c$

両辺2乗して

$$a^2+2ab+b^2=\frac{n^2}{m^2}-2\frac{n}{m}c+c^2$$

$$c=\frac{a^2+2ab+b^2-\frac{n^2}{m^2}-c^2}{2\frac{n}{m}}$$

ここで、(2)より、a^2, b^2, c^2は全て有理数なので、上式の右辺は有理数である。

同様に a, b も有理数であることが示せる

以上より 題意は示された

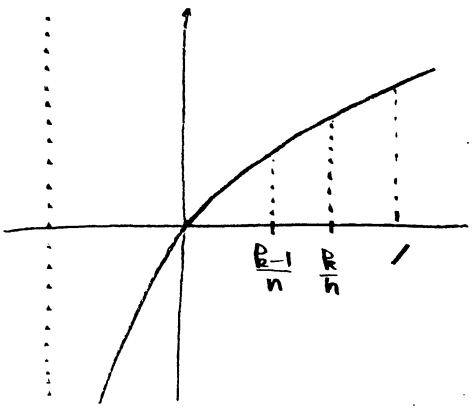
証明終

④

(1) $f(x)=\log(1+x)$ とおく. $(x>-1)$

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ となるが, このとき,

$x>-1$ なので $f'(x)$ は常に正である



また

$f''(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}$

となり, これは常に負の値をとる.

$$P_{k-1}P_k=\sqrt{\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)^2+\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n^2}+\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)^2} \quad \cdots ①$$

ここで $\dfrac{k-1}{n}\leqq x\leqq\dfrac{k}{n}$ の区間において, 平均値の定理より,

$$\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}}=f'(c),\quad \frac{k-1}{n}<c<\frac{k}{n}$$

を満たす c が存在する. 上式を整理すると,

$$f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\frac{1}{n}f'(c),\quad \frac{k-1}{n}<c<\frac{k}{n}.$$

$f''(x)$ が常に負なので, $f'(x)$ は単調に減少する.

$$f'\left(\frac{k}{n}\right)<f'(c)<f'\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

以上をまとめると,

$$\frac{1}{n}f'\left(\frac{k}{n}\right)<f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)<f'\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

これと①より,

$$\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\left\{f'\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}<P_{k-1}P_k<\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\left\{f'\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2}$$

$$\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}}<P_{k-1}P_k<\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{\left(1+\frac{k-1}{n}\right)^2}}$$

証明終

(2) (1) より

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} P_{k-1}P_k > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2}}$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = (*)$$

ここで $x^2+1=t^2$ とおくと　$2t\dfrac{dt}{dx}=2x$

x	$1 \to 2$
t	$\sqrt{2} \to \sqrt{5}$

$$(*) = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t}{x}\cdot\frac{t}{x}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} 1+\frac{1}{t^2-1}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} 1+\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\times\frac{1}{2}\,dt$$

$$= \left[1+\frac{1}{2}\log|t-1|-\frac{1}{2}\log|t+1|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \sqrt{5}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}-\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \sqrt{5}-\sqrt{2}+\log(2\sqrt{2}+2)-\log(\sqrt{5}+1)$$

また $L_n < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{(1+\frac{k-1}{n})^2}}$ であり、同様に

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{(1+\frac{k-1}{n})^2}} = \int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \sqrt{5}-\sqrt{2}+\log(2\sqrt{2}+2)-\log(\sqrt{5}+1)$$

以上より、はさみうちの原理より

$$\underline{\lim_{n\to\infty} L_n = \log\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+1}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$