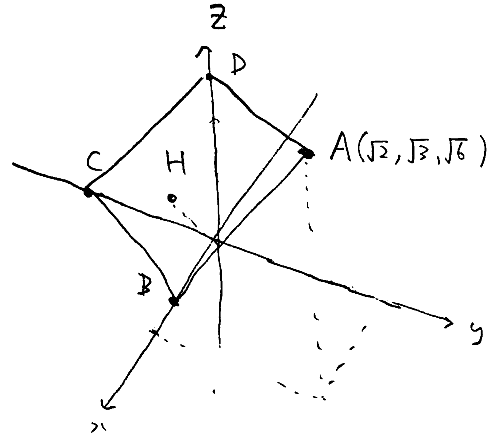
①

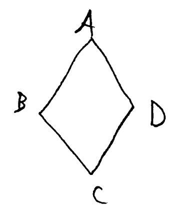
(1) B (b, 0, 0), C (0, c, 0), D (0, 0, d) とおく。

ABCDが平行四辺形だから、



$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

$$\begin{pmatrix} b-\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ -d \end{pmatrix}$$



$b=\sqrt{2}$, $c=-\sqrt{3}$, $-d=\sqrt{6}$

$\underline{B\,(\sqrt{2},0,0),\ C\,(0,-\sqrt{3},0),\ D\,(0,0,-\sqrt{6})}$

(2) $\vec{AB} = (0, -\sqrt{3}, -\sqrt{6})$, $\vec{AD} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{3+6} = 3$　$|\vec{AD}| = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$

$\vec{AB}\cdot\vec{AD} = 3$.

ABCDの面積をSとして

$$S = \sqrt{|\vec{AB}|^2|\vec{AD}|^2 - (\vec{AB}\cdot\vec{AD})^2} = \sqrt{9\times5-3^2} = \underline{6}$$

(3) Hは B, C, D 上にあるので

$$\vec{OH} = k\vec{OB} + l\vec{OC} + m\vec{OD} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}k \\ -\sqrt{3}l \\ \sqrt{6}m \end{pmatrix} \quad (k+l+m=1)$$

OH ⊥ ABD より

$\vec{OH}\cdot\vec{AB} = 0$　かつ　$\vec{OH}\cdot\vec{AD} = 0$

整理して.

以下計算のみなので、ここで保留した

(2)の結果が、きれいな値なので大丈夫そう…

これが、きたない値だったら、先にはすすまないかも。

②

(1) $a_1 = \dfrac{1}{3}$

$$a_2 = \frac{3a_1+1}{a_1+3} = \frac{3\times\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}+3} = \frac{3+3}{1+9} = \frac{3}{5}$$

$$a_3 = \frac{3a_2+1}{a_2+3} = \frac{3\times\frac{3}{5}+1}{\frac{3}{5}+3} = \frac{9+5}{3+15} = \frac{7}{9}$$

$$a_4 = \frac{3a_3+1}{a_3+3} = \frac{3\times\frac{7}{9}+1}{\frac{7}{9}+3} = \frac{21+9}{7+27} = \frac{15}{17}$$

$$a_5 = \frac{3a_4+1}{a_4+3} = \frac{3\times\frac{15}{17}+1}{\frac{15}{17}+3} = \frac{45+17}{15+51} = \frac{31}{33}$$

(2) (分母は $\underbrace{3,\ 5}_{2},\ \underbrace{\ ,\ 9}_{4},\ \underbrace{\ ,\ 17}_{8},\ \underbrace{\ ,\ 33}_{16} \cdots$ より. $3+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^k = 3+2\times\frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^n+1$

と推測できる)

(1)より $a_n = \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$ と推測できるので、これを数学的帰納法によって示す.

(i) $n=1$のとき.

$$a_1 = \frac{2^1-1}{2^1+1} = \frac{1}{3}$$ ∴ 成り立つ.

(ii) $n=k$のとき.

$$a_k = \frac{2^k-1}{2^k+1}$$ が成り立つと仮定する.

このとき.

ここで保留. (3)も手をつけ、見るだけは見ておく.

(1)を丁寧に、ここでまちがえるとまずい.

今回の最易問か.

(3) $ax+4by=1$ と x 軸の交点は $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$

〃 y 軸 〃 $\left(0, \frac{1}{4b}\right)$

$a>0$, $b<0$ に注意して

$$S(t) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{a}\times\left(-\frac{1}{4b}\right) = -\frac{1}{8ab} = -\frac{1}{8}\times\frac{4t^2+1}{4t^2-1}\times\left(-\frac{4t^2+1}{2t}\right)$$

$$= \frac{(4t^2+1)^2}{16t(4t^2-1)}$$

(4) $$\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{(4t^2+1)^2}{16t^2(4t^2-1)} = \lim_{t\to\infty}\frac{\left(4+\frac{1}{t^2}\right)^2}{16\left(4-\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{4^2}{16\times 4} = \underline{\frac{1}{4}}$$ //

---

(3)、(4)が簡単だったので最後まで解いた。

数値的にもまずまずきれい…大丈夫か？と思って

気にすること

③

(1) $x^2+4y^2=1$ の両辺をxで微分する

$$2x+8y\times\frac{dy}{dx}=0.$$

Qのy座標は0ではないので、Qにおける接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2a}{8b}=-\frac{a}{4b}$$

Qにおける接線は

$$y=-\frac{a}{4b}(x-a)+b$$

$$\Leftrightarrow\quad ax+4by=a^2+4b^2\quad\cdots ①$$

ここでQはだ円上にあるので

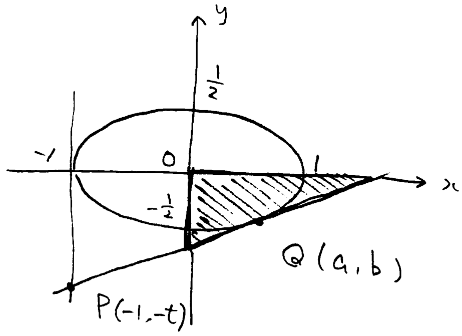
$$a^2+4b^2=1.\quad\cdots ②$$

① より、Qにおける接線は

$$ax+4by=1$$

と表せることが示された

証明終



(2). 接線はPを通るので、$(-1,-t)$を代入すると

$$-a-4bt=1$$

$$a=-1-4bt$$

これを②に代入

$$(1+4bt)^2+4b^2=1$$

$$(16t^2+4)b^2+8bt=0$$

$$b=-\frac{2t}{4t^2+1}\quad(\because b\neq 0)$$

このとき $a=-1-4t\times\left(-\frac{2t}{4t^2+1}\right)=\frac{4t^2-1}{4t^2+1}$

$$a=\frac{4t^2-1}{4t^2+1},\quad b=-\frac{2t}{4t^2+1}$$

$f(x) = xe^{1-x^2}$

④

(1) $f'(x) = e^{1-x^2} + xe^{1-x^2} \times (-2x) = (1-2x^2)e^{1-x^2}$

$f''(x) = -4xe^{1-x^2} + (1-2x^2)e^{1-x^2}(-2x) = (4x^3-6x)e^{1-x^2}$

$= 2x(2x^2-3)e^{1-x^2}$

(2) $f'(x)=0$ となるのは $1-2x^2=0$ より $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f''(x)=0$ 〃 $2x(2x^2-3)=0$ より $x = 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(xe^1 \times e^{-x^2}) = \lim_{x\to\infty}(e\,xe^{-x^2}) = e\times 0 = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-e(-x)e^{-(-x)^2}\right) = -e\times 0 = 0$

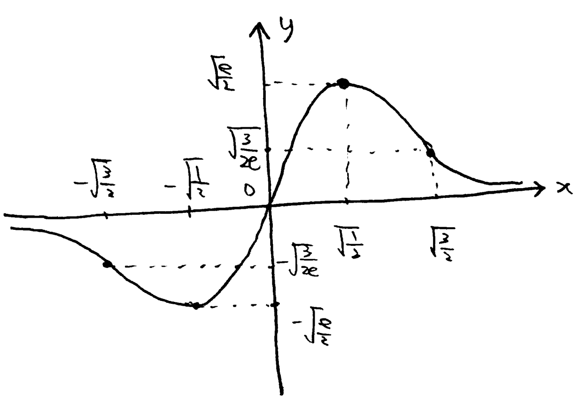
$f(\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{e}{2}}$, $f(-\sqrt{\frac{1}{2}}) = -\sqrt{\frac{e}{2}}$

$f(0) = 0$. $f(\sqrt{\frac{3}{2}}) = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{e}} = \sqrt{\frac{3}{2e}}$, $f(-\sqrt{\frac{3}{2}}) = -\sqrt{\frac{3}{2e}}$

$f(x)$の増減，凹凸は下のようになる

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\sqrt{\frac{3}{2e}}$	↘	$-\sqrt{\frac{e}{2}}$	↗	0	↗	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	↘	$\sqrt{\frac{3}{2e}}$	↘

グラフの概形は次のとおり



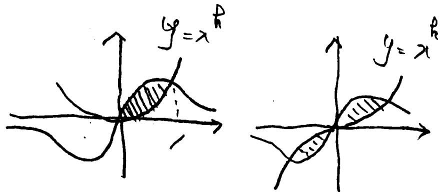
$x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ のとき 極小値 $-\sqrt{\frac{e}{2}}$

$x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ のとき 極大値 $\sqrt{\frac{e}{2}}$

変曲点は $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2e}}), (0,0), (\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2e}})$

漸近線は $y=0$

(3) $f(x)=x^k$ となるのは $x(e^{1-x^2}-x^{k-1})=0$ となるときで(2)のグラフの概形より、kが偶数のときは $x=0,1$、
奇数のときは $x=-1,0,1$ となる



偶数のとき　奇数のとき

kが偶数のとき

$$S(k)=\int_0^1 xe^{1-x^2}-x^k\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)'e^{1-x^2}\,dx-\int_0^1 x^k\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{1-x^2}-\frac{1}{k+1}x^{k+1}\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}e$$

$$=\frac{1}{2}(e-1)-\frac{1}{k+1}$$

kが奇数のとき

$$S(k)=\int_{-1}^1 \left|xe^{1-x^2}-x^k\right|dx=2\int_0^1 x^{1-x^2}-x^k\,dx$$

$$=e-1-\frac{2}{k+1}$$

以上より

$$S(k)=\begin{cases}\frac{1}{2}(e-1)-\frac{1}{k+1} & (k=1,3,5,7\cdots)\\ e-1-\frac{2}{k+1} & (k=2,4,6,\ldots)\end{cases}$$

(4)

ここまで最後の問題なので多目にするんだ。ここまでで40分台で。

(4)はやってみないと分からないので他を片付けてから最後にとりくむか？