2次方程式の解の配置問題と解と係数の関係

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ とし、

2次方程式 $f(x)=0$ の2解を α, β とする。このとき

① α, β がともに正　② $\alpha > 0, \beta < 0$　③ α, β がともに1より大

の3つの条件を考える（いずれも重解は2つの解と考える）

① $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} > 0$ かつ $\alpha\beta = \frac{c}{a} > 0$ かつ $D = b^2 - 4ac \geq 0$ Ⓐ

② $\alpha\beta = \frac{c}{a} < 0$ かつ $D = b^2 - 4ac \geq 0$ Ⓑ

③ $(\alpha - 1) + (\beta - 1) = -\frac{b}{a} - 2 > 0$ かつ $(\alpha-1)(\beta-1) = \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + 1 < 0$

かつ $D = b^2 - 4ac \geq 0$ Ⓒ

上の3つのうち 〜Ⓐ, 〜Ⓒ は必須で、これらの条件が無いと十分性を満たさない（①で $a=1, b=-2, c=2$ とすると $\alpha = 1+i, \beta = 1-i$ となってしまうが、これは $\alpha+\beta > 0$, $\alpha\beta > 0$ を満たしている）

〜Ⓑ は必須ではない。$\frac{c}{a} < 0 \iff ac < 0$ となるので Ⓑ は必ず成立してしまうからだが、これを自明とするのには無理があるので、Ⓑも示しておくのが好ましい

結論　解と係数の関係を用いて解の配置を考えるときは、必ず判別式とセットで使う

① (1) $f(x)=x|1-|x||$ とおく.

(i) $x \geqq 0$ のとき

$f(x)=x|1-x|$

(i-1) $1-x \geqq 0$ のとき $(0 \leqq x \leqq 1)$

$f(x)=x(1-x)=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$

(i-2) $1-x<0$ のとき $(x>1)$

$f(x)=x(x-1)$

(ii) $x<0$ のとき

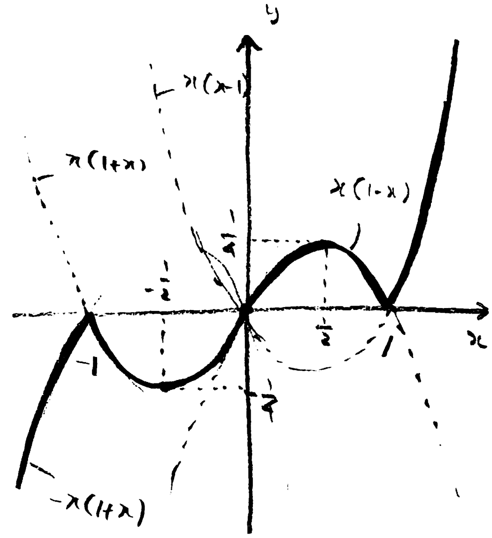
$f(x)=x|1+x|$

(ii-1) $1+x \geqq 0$ のとき $(-1 \leqq x < 0)$

$f(x)=x(1+x)=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

(ii-2) $1+x<0$ のとき $(x<-1)$

$f(x)=-x(1+x)$



以上より $y=f(x)$ のグラフは右のようになる

このグラフと $y=k$ のグラフの交点の数が $f(x)=k$ の実数解の個数に等しい

$$\begin{cases} k>\frac{1}{4} \text{ または } k<-\frac{1}{4} \text{ のとき} & 1\text{個} \\ k=\frac{1}{4} \text{ または } k=-\frac{1}{4} \text{ のとき} & 2\text{個} \\ -\frac{1}{4}<k<\frac{1}{4} \text{ のとき} & 3\text{個} \end{cases}$$

(2) (i)より $\dfrac{a}{a+b+c} = \dfrac{1}{2} \iff a = b+c$ …①

(ii)より

玉を2個とり出す。とり出し方は ${}_{a+b+c}C_2$ 通り

赤玉と白玉を1つずつとり出す。とりだし方は ${}_aC_1 \times {}_bC_1$

よって条件は $\dfrac{a \times b}{{}_{a+b+c}C_2} = \dfrac{1}{7} \iff 14ab = (a+b+c)(a+b+c-1)$ …②

(iii)より

3個の玉のとり出し方は ${}_{a+b+c}C_3$

1個ずつとりだすのは $a \times b \times c$

よって条件は $\dfrac{abc}{{}_{a+b+c}C_3} = \dfrac{6}{35} \iff (a+b+c)(a+b+c-1)(a+b+c-2) = 35abc$ …③

②を③に代入

$$2 \cdot \cancel{14}\cancel{ab}(a+b+c-2) = \overset{5}{\cancel{35}}\,\cancel{ab}c$$

$$2a+2b-3c-4=0 \quad \text{…④}$$

①を②に代入

$$14ab = 2a(2a-1) \quad \text{…⑤}$$

④に①を代入

$$2a+2b-3(a-b)-4=0$$

$$-a+5b-4=0 \quad \text{…⑥}$$

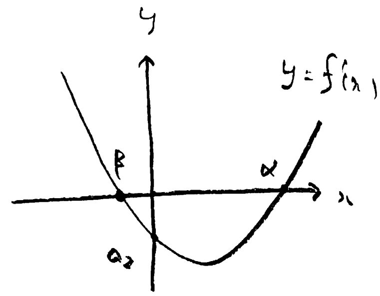
④,⑥から b を消去すると $a=11$、これを⑥に代入するなどして

$b=3,\ c=8$

$\therefore\ \underline{(a, b, c) = (11, 3, 8)}$

② (1) $f'(x) = 3x^2+2a_1x+a_2$

ここで $y=f'(x)$ のグラフについて



$f'(0) = 0+0+a_2<0$ であり、

また $f'(x)$ のグラフの2次の係数は正なので、

$f'(x)$ のグラフは右のようになり、$y=f'(x)$ のグラフが $x>0$ の領域と $x<0$ の領域において、それぞれ1度ずつ、x軸と交わることが分かる。

よって、$f'(x)=0$ は、正の実数解と負の実数解を1つずつもつことが示された。

また解と係数の関係より

$$\alpha+\beta = -\frac{2a_1}{3}>0 \iff -\alpha<\beta$$

∴ $-\alpha>\beta$ が成り立っている。

(2) $x\geqq 0$ の範囲における $f(x)$ の増減は右のようになる

x	0	…	α	…
$f'(x)$	a_2	$-$	0	$+$
$f(x)$	a_3	↘		↗

$f(0) = a_3<0$、だから、$f(\alpha)<0$

また $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ だから、$f(x)$ のグラフは $x>\alpha$ の範囲でx軸と唯1つの交点を有する。

∴ $f(x)=0$ は $x>0$ の範囲に唯1つの実数解をもつ。

(3) $f(x)+f(-x) = x^3+a_1x^2+a_2x+a_3-x^3+a_1x^2-a_2x+a_3$

$$= 2a_1x^2+2a_3$$

ここで $x^2\geqq 0$、$a_1<0$、$a_3<0$ だから、$a_1x^2+a_3<0$。

∴ $f(x)+f(-x)<0$ が任意の実数xについて成立する。

(4) (2)より $p>\alpha$

また(1)より $-\alpha<\beta$ も成り立っているので $-p<-\alpha<\beta$

$x < \beta$ の範囲で $f'(x) > 0$ となっているので、

$x \leqq -p$ の範囲でも $f'(x) > 0$.

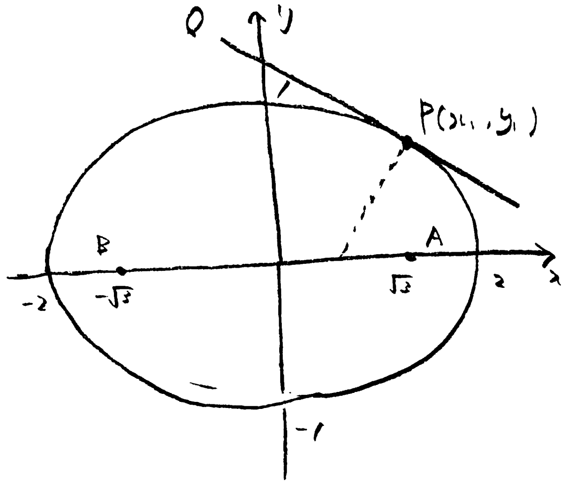
また(1)より $f(p) + f(-p) < 0$ であり、また $f(p) = 0$ より $f(-p) < 0$

以上より $x \leqq -p$ を満たす x について

$$f(x) \leqq f(-p) < 0$$

$\therefore$ $f(x) < 0$. $(x \leqq -p)$ が示された

③



(1) $|\overrightarrow{BP}|^2 = (x_1+\sqrt{3})^2 + y_1^2$

ここで Pはだ円上にあるので

$$\frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1 \iff y_1^2 = 1 - \frac{1}{4}x_1^2$$

を上の式に代入

$$|\overrightarrow{BP}|^2 = (x_1+\sqrt{3})^2 + 1 - \frac{1}{4}x_1^2$$

$$= \frac{3}{4}x_1^2 + 2\sqrt{3}\,x_1 + 4$$

$$= \frac{3}{4}\left(x_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$x_1 > 0$ なので $|\overrightarrow{BP}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + 2}$

(2) $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x_1-\sqrt{3})^2 + y_1^2} = \sqrt{\frac{3}{4}\left(x_1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|x_1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right|$

$x_1 \leqq 2 < \frac{4}{\sqrt{3}}$ より $x_1 - \frac{4}{\sqrt{3}} < 0$. よって $|\overrightarrow{AP}| = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + 2$.

$|\overrightarrow{AP}| + |\overrightarrow{BP}| = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + 2 = \underline{4}$

(3) だ円の式の両辺を x で微分する.

$$\frac{2x}{4} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Pにおける接線の傾きは $\frac{x_1}{2} + 2y_1\frac{dy}{dx} = 0$ より $\frac{dy}{dx} = -\frac{x_1}{4y_1}$

したがって Pを通って傾き $-\frac{x_1}{4y_1}$ の直線が l であり

$$y = -\frac{x_1}{4y_1}(x - x_1) + y_1$$

$$y_1 y = -\frac{x_1}{4}x + \frac{x_1^2}{4} + y_1^2$$

$$\underline{\frac{x_1}{4}x + y_1 y = 1}$$

(4) (3)より $\vec{n} = \left(\frac{x_1}{4}, y_1\right)$ とおくことができる

$\overrightarrow{AP}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ_A とすると

$$\cos\theta_A = \frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AP}||\vec{n}|} = \frac{(x_1-\sqrt{3},\ y_1)\cdot\left(\frac{x_1}{4},\ y_1\right)}{\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)\times|\vec{n}|}$$

$$= \frac{\frac{x_1^2}{4}+y_1^2-\frac{\sqrt{3}}{4}x_1}{\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)\times|\vec{n}|} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{4}x_1}{2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1}\times\frac{1}{|\vec{n}|} = \frac{1}{2|\vec{n}|}$$

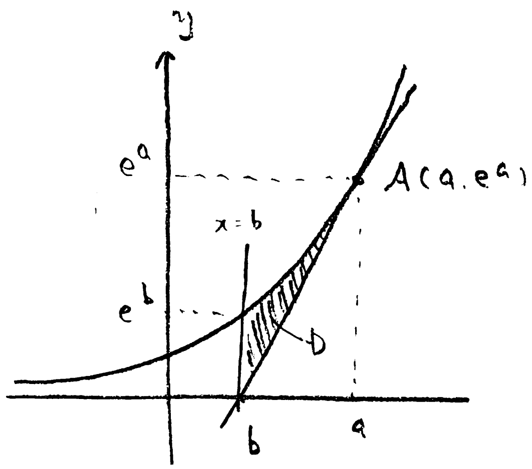
$\overrightarrow{BP}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ_B とすると

$$\cos\theta_B = \frac{\overrightarrow{BP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BP}||\vec{n}|} = \frac{\frac{x_1^2}{4}+y_1^2+\frac{\sqrt{3}}{4}x_1}{\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)\times|\vec{n}|} = \frac{1}{2|\vec{n}|}$$

$\therefore$ $\theta_A=\theta_B$ となり、$\overrightarrow{AP}$ と $\vec{n}$、$\overrightarrow{BP}$ と $\vec{n}$ のなす角が等しいことが示された

④

$y' = e^x$



(1) $x=a$のとき $y' = e^a$.

したがって l は

$$y = e^a(x-a)+e^a$$
$$y = e^a x - ae^a + e^a$$

$y=0$のとき、$x = a-1$

$\therefore\ b = a-1$

(2)
$$S = \int_b^a e^x - (e^a x - ae^a + e^a)\,dx$$
$$= \left[e^x - \frac{1}{2}e^a x^2 + ae^a x - e^a x\right]_{a-1}^{a}$$
$$= \cancel{e^a} - \cancel{\frac{1}{2}a^2 e^a} + \cancel{a^2 e^a} - \cancel{ae^a} - \left(e^{a-1} - \frac{1}{2}e^a(\cancel{a^2} - 2a + 1) + \cancel{(a^2-a)}e^a - ae^a + \cancel{e^a}\right)$$
$$= -e^{a-1} + \frac{1}{2}e^a - ae^a + ae^a = \underline{\frac{1}{2}e^a - e^{a-1}}$$

(3)
$$\int (\log y)^2 dy = y(\log y)^2 - \int y \times 2\log y \times \frac{1}{y}\,dy$$
$$= y(\log y)^2 - 2(y\log y - y) + C$$
$$= y(\log y)^2 - 2y\log y + 2y + C \quad (C\text{は積分定数})$$
$$\int_{e^b}^{e^a} (\log y)^2 dy = \left[y(\log y)^2 - 2y\log y + 2y\right]_{e^b}^{e^a}$$
$$= e^a \times a^2 - 2e^a \times a + 2e^a - b^2 e^b + 2be^b - 2e^b$$
$$= e^a(a^2 - 2a + 2) + e^{a-1}(-(a-1)^2 + 2(a-1) - 2)$$
$$= \underline{e^a(a^2 - 2a + 2) + e^{a-1}(-a^2 + 4a - 5)}$$

(4)

$$V = \int_0^{e^b} \pi x^2 - \pi b^2 \, dy + \int_{e^b}^{e^a} \pi x^2 - \pi x^2 \, dy$$

ここで $y = e^a x - ae^a + e^a \iff x = \dfrac{y + ae^a - e^a}{e^a}$

$y = e^x \iff x = \log y$

となるので.

$$V = \pi \int_0^{e^b} \left(\frac{y}{e^a} + a - 1\right)^2 - (a-1)^2 \, dy + \pi \int_{e^b}^{e^a} \left(\frac{y}{e^a} + a - 1\right)^2 - (\log y)^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^{e^b} \frac{y^2}{e^{2a}} + 2(a-1)\frac{y}{e^a} \, dy + \pi \int_{e^b}^{e^a} \frac{y^2}{e^{2a}} + 2(a-1)\frac{y}{e^a} + (a-1)^2 \, dy$$

$$- \pi \int_{e^b}^{e^a} (\log y)^2 \, dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^3}{3e^{2a}} + (a-1)\frac{y^2}{e^a}\right]_0^{e^{a-1}} + \pi \left[\frac{y^3}{3e^{2a}} + (a-1)\frac{y^2}{e^a} + (a-1)^2 y\right]_{e^{a-1}}^{e^a}$$

$$- \pi \int_{e^b}^{e^a} (\log y)^2 \, dy$$

$$= \pi \Big\{ \cancel{\frac{e^{3a-3}}{3e^{2a}}} + \cancel{(a-1)\frac{e^{2a-2}}{e^a}} - 0 + \frac{e^{3a}}{3e^{2a}} + (a-1)\frac{e^{2a}}{e^a} + (a-1)^2 e^a - \cancel{\frac{e^{3a-3}}{3e^{2a}}} - \cancel{(a-1)\frac{e^{2a-2}}{e^a}}$$

$$- (a-1)^2 e^{a-1} - e^a(a^2 - 2a + 2) - e^{a-1}(-a^2 + 4a - 5) \Big\}$$

$$= \pi \Big(\frac{1}{3}e^a + \boxed{ae^a} - \cancel{e^a} + \cancel{a^2 e^a} - \cancel{2ae^a} + \cancel{e^a} - \cancel{a^2 e^{a-1}} + \boxed{2ae^{a-1}} - \boxed{e^{a-1}} - \cancel{a^2 e^a} + \cancel{2ae^a} - 2e^a$$

$$+ \cancel{a^2 e^{a-1}} - 4ae^{a-1} + \boxed{5e^{a-1}} \Big)$$

$$= \pi \left(-\frac{5}{3}e^a + ae^a - 2ae^{a-1} + 4e^{a-1} \right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi e^{a-1}(-5e + 3ea - 6a + 12)$$

(5) $\lim_{a\to\infty} \frac{V}{ae^a} = \lim_{a\to\infty} \frac{\pi}{3a}\times\left(-5+3a-\frac{6a}{e}+\frac{12}{e}\right)$

$= \lim_{a\to\infty} \frac{\pi}{3}\left\{\left(3-\frac{6}{e}\right)+\frac{1}{a}\left(-5+\frac{12}{e}\right)\right\}$

$= \frac{\pi}{3}\left(3-\frac{6}{e}\right) = \underline{\pi - \frac{2\pi}{e}}$

$\lim_{a\to\infty} \frac{V}{aS} = \lim_{a\to\infty} \frac{\frac{1}{3}\pi e^{a-1}(-5e+3ea-6a+12)}{a\times\left(\frac{1}{2}e^a-e^{a-1}\right)}$

$= \lim_{a\to\infty} \frac{\frac{1}{3}\pi\left(-\frac{5e}{a}+3e-6+\frac{12}{a}\right)}{\frac{1}{2}e-1}$

$= \frac{\frac{1}{3}\pi(3e-6)}{\frac{1}{2}e-1} = \frac{2\pi(e-2)}{e-2} = \underline{2\pi}$