①

(1)

条件より $4\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} + 5\overrightarrow{CG} = 12\overrightarrow{OG}$

$\Leftrightarrow \quad 4(\overrightarrow{OG} - \vec{a}) + 3(\overrightarrow{OG} - \vec{b}) + 5(\overrightarrow{OG} - \vec{c}) = 12\overrightarrow{OG}$

$\Leftrightarrow \quad +4\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$

証明終

(2) (1)より $\vec{c} = -\frac{4}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$

これを $|\vec{c}|^2 = 25$ に代入

$$\frac{1}{25}\left|4\vec{a} + 3\vec{b}\right|^2 = 25$$

$$16 \times 25 + 9 \times 25 + 24\vec{a}\cdot\vec{b} = 25^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

同様に $\vec{b} = -\frac{4}{3}\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{c}$ および $|\vec{b}| = 5$ より $\quad \vec{a}\cdot\vec{c} = -20$

$\vec{a} = -\frac{3}{4}\vec{b} - \frac{5}{4}\vec{c}$ および $|\vec{a}| = 5$ より $\quad \vec{b}\cdot\vec{c} = -15$

$\therefore \underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = 0,\ \vec{a}\cdot\vec{c} = -20,\ \vec{b}\cdot\vec{c} = -15}$ //

(3)

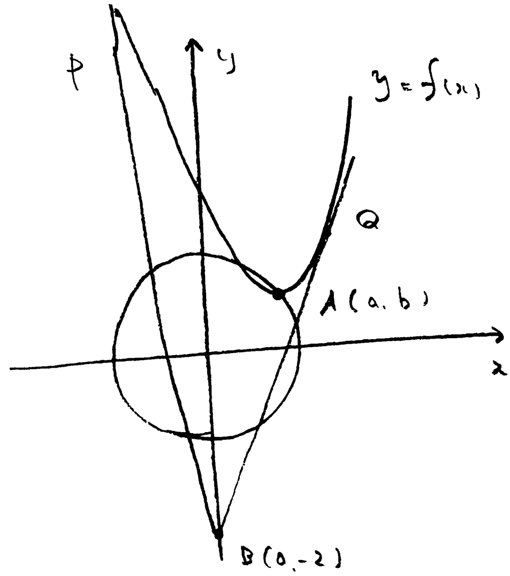
$$|\overrightarrow{OG}|^2 = \left|\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|^2 = \frac{1}{9}\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|^2$$

$$= \frac{1}{9}\left(25 + 25 + 25 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(75 + 0 - 40 - 30\right) = \frac{5}{9}$$

$\therefore \underline{|\overrightarrow{OG}| = \frac{\sqrt{5}}{3}}$ //

②



(1) $f'(x) = 2(x-a)$

$(t, f(t))$ における $y=f(x)$ の接線は、

$$y = 2(t-a)(x-t) + (t-a)^2 + b.$$

これが、B を通るので、

$$-2 = -2t^2 + \cancel{2at} + t^2 - \cancel{2at} + a^2 + b.$$

$$t^2 = a^2+b+2$$

$$t = \pm\sqrt{a^2+b+2}$$

$p<q$ なので $p = -\sqrt{a^2+b+2}$, $q = \sqrt{a^2+b+2}$

$$\begin{cases} l_1 : y = -2\left(a+\sqrt{a^2+b+2}\right)x - 2 \\ l_2 : y = 2\left(\sqrt{a^2+b+2} - a\right)x - 2 \\ P\left(-\sqrt{a^2+b+2},\ 2a^2+2b+2+2a\sqrt{a^2+b+2}\right) \\ Q\left(\sqrt{a^2+b+2},\ 2a^2+2b+2-2a\sqrt{a^2+b+2}\right) \end{cases}$$

(2)

$$S = \int_p^0 f(x) - 2(p-a)x + 2\,dx + \int_0^q f(x) - 2(q-a)x + 2\,dx$$

$$= \int_p^0 (x-p)^2\,dx + \int_0^q (x-q)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(0-p)^3 - \frac{1}{3}(0-q)^3 = \frac{1}{3}q^3 - \frac{1}{3}p^3$$

$$= \frac{1}{3}(q-p)\left\{(q+p)^2 - pq\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\times 2\sqrt{a^2+b+2}\times(a^2+b+2)$$

ここで (a, b) は円上の点なので $a^2+b^2=1$

よって $S = \frac{2}{3}(-b^2+b+3)^{\frac{3}{2}}$

(3) $$S = \frac{2}{3}\left\{-\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

Aは円周上にあるので $-1 \leqq b \leqq 1$ であり、

したがって $-\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$ は $b=\frac{1}{2}$ のとき最大となる.

$b=\frac{1}{2}$ のとき S は

$$S = \frac{2}{3}\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{13}{6}\sqrt{\frac{13}{4}} = \underline{\frac{13\sqrt{13}}{12}}$$

このとき $a = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ $\underline{A\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

③

(1) $a_1 = 0,\ a_2 = 3$

$a_3 = a_2 - 1 = 3 - 1 = 2$

$a_4 = a_3 - 1 = 2 - 1 = 1$

$a_5 = a_4 - 1 = 1 - 1 = 0$

$a_6 = a_5 + 6 = 6$

$a_7 = a_6 - 1 = 5$

$a_8 = a_7 - 1 = 4$

$a_9 = a_8 - 1 = 3$

$a_{10} = a_9 + 6 = 9$

(2) $\{a_n\} = \{0, 3, 2, 1, 0, 6, 5, 4, 3, 9, 8, 7, 6, 12, \dots\}$

となるので、

$$\begin{cases} a_{4n-2} = 3n \\ a_{4n-1} = 3n-1 \\ a_{4n} = 3n-2 \\ a_{4n+1} = 3n-3 \end{cases} \quad (\text{すべて } n \geqq 1) \quad \cdots (*)$$

と類推できるので、これを数学的帰納法によって示す。

(i) $n=1$ のとき

$a_{4\times1-2} = a_2 = 3\times1 = 3$

$a_{4\times1-1} = a_3 = 3\times1-1 = 2$

$a_{4\times1} = a_4 = 3\times1-2 = 1$

$a_{4\times1+1} = a_5 = 3\times1-3 = 0$

となり全て成り立つ。

(ii) $n \leqq k$ のとき、

$$\left.\begin{aligned} a_{4n-2} &= 3n \\ a_{4n-1} &= 3n-1 \\ a_{4n} &= 3n-2 \\ a_{4n+1} &= 3n-3 \end{aligned}\right\} \quad (n \leqq k)$$

が成り立っていると仮定すると、

このとき $a_{4(k-1)-2} = 3(k-1)$ だから $a_{4k+1} = a_{4k-6}$

となっているので $a_{4k+2} = 3k-3+6 = 3k+3$.

すなわち $a_{4(k+1)-2} = 3(k+1)$ が成り立っている。

$a_1 \sim a_{4k+1}$ までで最大の数は $a_{4k-2}\ (=3k)$ だから

$$a_{4k+3} = a_{4k+2} - 1 = 3k+2 = 3(k+1)-1$$

$$a_{4k+4} = a_{4k+3} - 1 = 3k+1 = 3(k+1)-2$$

$$a_{4k+5} = a_{4k+4} - 1 = 3k = 3(k+1)-3$$

となり、$n \leqq k$ において、仮定が成り立てば、$n = k+1$ においても全ての仮定が成り立つ。

(i)(ii) より数学的帰納法によって (＊) は示された。

$2015 = 4 \times 504 - 1$ だから、

$$a_{2015} = a_{4\times504-1} = 3\times504-1 = \underline{1511}$$

(3) $201 = 4 \times 50 + 1$

$$\sum_{k=1}^{201} a_k = \sum_{k=1}^{50} a_{4k-2} + \sum_{k=1}^{50} a_{4k-1} + \sum_{k=1}^{50} a_{4k} + \sum_{k=1}^{50} a_{4k+1} + a_1$$

$$= \sum_{k=1}^{50} (a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k} + a_{4k+1}) + 0$$

$$= \sum_{k=1}^{50} (3k + 3k-1 + 3k-2 + 3k-3)$$

$$= \sum_{k=1}^{50} (12k-6)$$

$$= \frac{6 + 12\times50 - 6}{2} \times 50 = \underline{15000}$$

④

(1) $f_2(x)=\int_0^x f_1(t)dt=\int_0^x 1-\frac{t^2}{2}dt=\left[t-\frac{t^3}{2\times3}\right]_0^x=\underline{x-\frac{x^3}{6}}$

$f_3(x)=1-\int_0^x f_2(t)dt=1-\int_0^x t-\frac{t^3}{6}dt=1-\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{24}\right]_0^x$

$=\underline{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}}$

(2) $0<t\leqq1$において $t-\frac{t^3}{3!}<\sin t<t$ が成り立っているので、

$0<x\leqq1$を満たす x に対し、$0\leqq t\leqq x$ の範囲で上式を積分すると、

$$\int_0^x t-\frac{t^3}{3!}dt<\int_0^x \sin t\,dt<\int_0^x t\,dt$$

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{x^4}{4!}<1-\cos x<\frac{1}{2}x^2$$

$$-\frac{x^4}{4!}<1-\frac{1}{2}x^2-\cos x<0<\frac{x^4}{4!}$$

$$-\frac{x^4}{4!}<f_1(x)-\cos x<\frac{x^4}{4!}$$

が成り立っていることが分かる。

また与不等式について、$x=0$のとき、$f_1(0)-\cos 0=1-\frac{0^2}{2}-1=0$

となることから、与不等式が成り立つことが分かる。

以上より

$$-\frac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\frac{x^4}{4!}$$

が成り立つことが示された。

(3) 数学的帰納法により証明する。

(i) $n=1$のとき

(2)より成り立つ。

(ii) $m=k$ のとき

$$-\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \leqq f_{2k-1}(x)-\cos x \leqq \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \quad \cdots ①$$

が成り立つと仮定する。このとき

$$-\frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!} \leqq f_{2k+1}(x)-\cos x \leqq \frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!} \quad \cdots ②$$

を示す。

①より 両辺を $0 \leqq t \leqq x$ で積分すると

$$\int_0^x -\frac{t^{2k+2}}{(2k+2)!}dt \leqq \int_0^x f_{2k-1}(t)-\cos t\,dt \leqq \int_0^x \frac{t^{2k+2}}{(2k+2)!}dt$$

$$-\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \leqq f_{2k}(x)-\sin x \leqq \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}$$

もう1度積分する。

$$\int_0^x -\frac{t^{2k+3}}{(2k+3)!}dt \leqq \int_0^x f_{2k}(t)\,dt-\int_0^x \sin t\,dt \leqq \int_0^x \frac{t^{2k+3}}{(2k+3)!}dt$$

$$-\frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!} \leqq 1-f_{2k+1}(x)+\cos x-1 \leqq \frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!}$$

$$-\frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!} \leqq f_{2k+1}(x)-\cos x \leqq \frac{x^{2k+4}}{(2k+4)!}$$

これは②と同じ

よって $m=k$ のときに不等式が成り立てば $m=k+1$ のときも成り立つ

(i)(ii) より 数学的帰納法によって、すべての自然数 m について

$$-\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \leqq f_{2m-1}(x)-\cos x \leqq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$ が成り立っている。

(4) (3) より $x = \frac{\pi}{6}$ のとき

$$-\frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+2}}{(2m+2)!} \leqq f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\frac{\pi}{6} \leqq \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

$\lim_{m\to\infty} \frac{\pm\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+2}}{(2m+2)!} = 0$ となるので、はさみうちの原理より

$$\lim_{m\to\infty}\left\{ f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} = 0.$$

$$\therefore \quad \lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$