① (1) $n(n+1)+a=(n+k)^2$ より $a=(n+k)^2-n(n+1)=2nk+k^2-n$

$$
\begin{aligned}
\text{左辺}-\text{右辺} &= a-k^2-2k+1 \\
&= 2nk+\cancel{k^2}-n-\cancel{k^2}-2k+1 \\
&= 2k(n-1)-n+1 \\
&= (n-1)(2k-1)
\end{aligned}
$$

n, kは自然数だから $n-1\geqq 0$, $2k-1\geqq 0$

よって $(n-1)(2k-1)\geqq 0$ であり $a\geqq k^2+2k-1$ が示された.

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるとき その平方数は $(n+k)^2$ と表せる.

$$n(n+1)+14=(n+k)^2$$

このとき, (1)より $14\geqq k^2+2k-1=(k+1)^2-2$

が成り立つので, kは $k=1, 2, 3$ に限られる.

(i) $k=1$ のとき

$$n(n+1)+14=(n+1)^2$$
$$n=13$$

(ii) $k=2$ のとき

$$n(n+1)+14=(n+2)^2$$
$$n=\frac{14}{3} \quad (\text{不適})$$

(iii) $k=3$ のとき

$$n(n+1)+14=(n+3)^2$$
$$n=1$$

以上より, $\underline{n=1, 13}$

② (1) $f'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x$

$f'(x) \geqq 0$ となるのは　$0 \leqq x \leqq \pi$

$f(x)$ の増減は右のとおり.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	$1+\pi$	$\searrow$	$1-2\pi$

$f(0) = 1,\ f(\pi) = 1+\pi,\ f(2\pi) = 1-2\pi < 0$

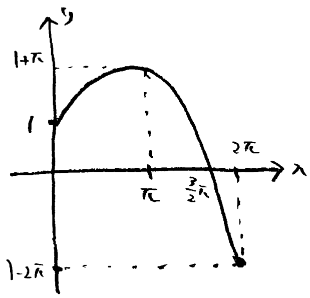
以上より $f(x)$ は $x=\pi$ のとき最大値 $1+\pi$, $x = 2\pi$ のとき最小値 $1-2\pi$ をとる

(2) $\int f(x)dx = \int 1+\sin x - x\cos x\, dx = \int 1+\sin x\, dx - \int x\cos x\, dx$

$= x - \cos x - x\sin x + \int \sin x\, dx = x - 2\cos x - x\sin x + C$

(Cは積分定数)

(3) $f(\frac{3}{2}\pi) = 1-1-0 = 0$ だから



$\int_0^{2\pi} |f(x)|dx$

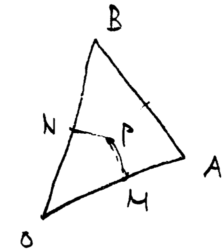
$= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} -f(x)dx$

$= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$

$= \Big[x - 2\cos x - x\sin x\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi} + \Big[x - 2\cos x - x\sin x\Big]_{2\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$

$= \left(\frac{3}{2}\pi - 0 + \frac{3}{2}\pi\right)\times 2 - (0-2-0) - (2\pi - 2 - 0) = 6\pi + 2 - 2\pi + 2 = \underline{4\pi + 4}$

③ (1) OA, OBの中点を M, Nとする



Pは△OABの外心なので、PM⊥OA かつ PN⊥OB

PM⊥OAのとき、

$\dfrac{z-\frac{1}{2}\alpha}{\alpha}$ は純虚数となるので

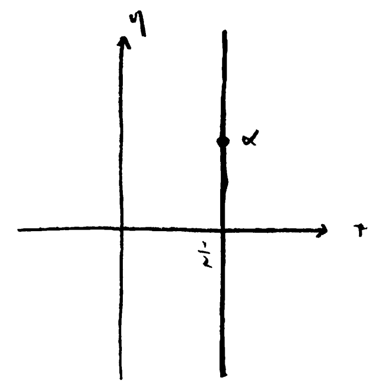
$$\frac{z-\frac{1}{2}\alpha}{\alpha}=\frac{\alpha\beta-\frac{1}{2}\alpha}{\alpha}=\beta-\frac{1}{2}$$ は純虚数

PN⊥OBより

$$\frac{z-\frac{1}{2}\beta}{\beta}=\alpha-\frac{1}{2}$$ も純虚数.

よって α は実部が $\frac{1}{2}$ であり

その軌跡は右図のようになる



(2) (1)より $\alpha=\frac{1}{2}+ai$, $\beta=\frac{1}{2}+bi$ (a, bは $a\neq b$ を満たす実数)

$$z=\alpha\beta=\left(\frac{1}{2}+ai\right)\left(\frac{1}{2}+bi\right)=\frac{1}{4}-ab+\frac{a+b}{2}i$$

$z=x+yi$ とおくと $x=\frac{1}{4}-ab$, $y=\frac{a+b}{2}$

a, bは $a\neq b$ を満たす実数で、a, bを2解にもつ ところで 2次方程式として

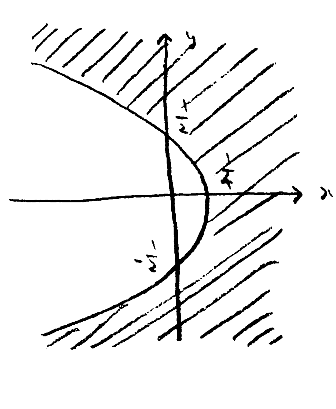
$$t^2-(a+b)t+ab=0$$

$$\Leftrightarrow\ t^2-2yt+\frac{1}{4}-x$$

が考えられるので ① の2次方程式が異なる2つの実数解をもつときを考えればよい

判別式をDとして

$$D/4=y^2-\frac{1}{4}+x>0 \quad\Leftrightarrow\quad x>-y^2+\frac{1}{4}$$



よって P(z)の存在範囲は左のようになる

(境界は含まない)

④ (1) 点Pは9回目終了時点で9以下にあるが、それは1〜9回目に全て1の目が出たときに限られる(10回目はどんな目でもよい)。

よって　$P_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9 \times 1 = \left(\frac{1}{6}\right)^9$

(2) 8回目終了時点で9以下にある。

これは

(i) 1の目が8回　　(ii) 1の目7回と2の目が1回

のいずれか。

(i)のとき9回目は2以上の目。(ii)のときは9回目はどんな目でもよい。

$$P_9 = \left(\frac{1}{6}\right)^8 \times \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times {}_8C_1 \times 1 = \frac{1}{6^9}(5 + 8 \times 6) = \frac{53}{6^9}$$

(3) 2回目終了時は 10−6 〜 9 すなわち 4〜9 にある

(i) 2回目で4

初めの2回目は 1-3, 2-2, 3-1　3回目は6の目　　$\frac{3}{36} \times \frac{1}{6}$

(ii) 2回目で5

1-4, 3-2, 2-3, 4-1　3回目は5または6の目　　$\frac{4}{36} \times \frac{2}{6}$

(iii) 2回目で6　$\frac{5}{36} \times \frac{3}{6}$

(iv) 2回目で7　$\frac{6}{36} \times \frac{4}{6}$

(v) 2回目で8　$\frac{5}{36} \times \frac{5}{6}$

(vi) 2回目で9　$\frac{4}{36} \times \frac{6}{6}$

以上より

$$P_3 = \frac{1}{6^3}(3 + 8 + 15 + 24 + 25 + 24) = \frac{99}{6^3} = \frac{11}{24}$$

⑤

(1) $P(x, y)$ とおく

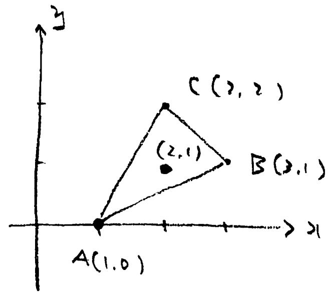
$AP^2+BP^2+CP^2 \leqq a$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(x-3)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-2)^2 \leqq a$

$\Leftrightarrow 3(x-2)^2+3(y-1)^2 \leqq a-4$ …①

これを満たす x, y が存在するのは、$a \geqq 4$ のとき

（∵ 左辺は必ず正）



(2) ①より

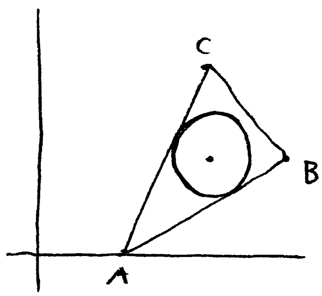
$(x-2)^2+(y-1)^2 \leqq \dfrac{a-4}{3}$ となるが、$a>4$ のとき、これは $(2, 1)$ を中心とした半径 $\sqrt{\dfrac{a-4}{3}}$ の円の内部の領域を表している。

T内の点で $(2, 1)$ から最も離れているのは A だから、$(x, y)=(1, 0)$ が①を満たせば、TはDに含まれる

$3(1-2)^2+3(0-1)^2 \leqq a-4$

$\Leftrightarrow 10 \leqq a$. $\therefore a \geqq 10$

(3) (2)の円の内部の領域がT内に含まれればよい



直線ABは $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-2y-1=0$

これと $(2, 1)$ との距離は $\dfrac{|2-2-1|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

ACは $y=2x-2 \Leftrightarrow 2x-y-2=0$

これと $(2, 1)$ との距離は $\dfrac{|4-1-2|}{\sqrt{2^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

BCは $y=-x+4 \Leftrightarrow x+y-4=0$

これと $(2, 1)$ との距離は $\dfrac{|2+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

以上より、半径の $\sqrt{\dfrac{a-4}{3}}$ が $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 以下となればよいので

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \leqq \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{a-4}{3} \leqq \frac{1}{5} \Leftrightarrow a \leqq \frac{23}{5}$$

(1)の条件を併せて、$4 \leqq a \leqq \dfrac{23}{5}$