①

$C_1 : y = x^2,\quad C_2 : y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$

(1) 連立して.

$$x^2 = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$$

$\Leftrightarrow\ 2x^2 - 2kx - 1 + k^2 = 0 \quad \cdots ①$

①の方程式が、異なる2つの正の実数解をもてばよい. ①式左辺を $f(x)$、①の判別式を D とすると、そのための条件は.

①の判別式 $> 0 \iff D = k^2 - 2(k^2 - 1) > 0 \iff -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$

$f(0) > 0 \iff k^2 - 1 > 0 \iff k < -1,\ k > 1$

$f(x)$のグラフの軸 $> 0 \iff \frac{k}{2} > 0 \iff k > 0$.

以上をまとめて.

$$\underline{1 < k < \sqrt{2}}$$

(2) ①の2解を α, β とすると、交点は $(\alpha, \alpha^2), (\beta, \beta^2)$ とおくことができる. また、解と係数の関係より $\alpha + \beta = k,\ \alpha\beta = \frac{k^2 - 1}{2}$ である

G を (X, Y) とすると.

$$(X, Y) = \left(\frac{0 + \alpha + \beta}{3}, \frac{0 + \alpha^2 + \beta^2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{k}{3}, \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{3}\right) = \left(\frac{k}{3}, \frac{k^2 - k^2 + 1}{3}\right)$$

$$X = \frac{1}{3}k,\quad Y = \frac{1}{3}$$

(1)より $1 < k < \sqrt{2}$ なので $\frac{1}{3} < X < \frac{\sqrt{2}}{3}$.

よって G の軌跡は

$$\underline{y = \frac{1}{3} \quad \left(\frac{1}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}\right)}$$

(3) (2)より P, Q を $(\alpha, \alpha^2), (\beta, \beta^2)$ とすると.

$$S = \frac{1}{2}\left|\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta\right|$$

$$S^2 = \frac{1}{4}\alpha^2\beta^2(\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{(k^2 - 1)^2}{4}\left\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\right\} = \underline{\frac{1}{16}(k^2 - 1)^2(2 - k^2)}$$

(4) $k^2 = X$ とする。

$$S^2 = \frac{1}{16}(X-1)^2(2-X) = g(X)$$ とおく。

$$g'(X) = \frac{1}{16}(X-1)(5-3X)$$

(1)より $1 < k < \sqrt{2}$ なので $1 < X < 2$

この範囲で $g'(X) = 0$ となるのは $X = \frac{5}{3}$ のときで、$g(X)$ の増減は下のようになる

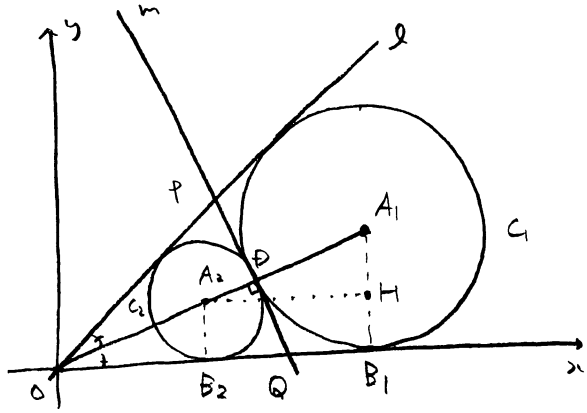
X	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	2
$g'(X)$		$+$	0	$-$	
$g(X)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$g\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{16} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{108}$$

$X = \frac{5}{3}$ のとき $k = \sqrt{\frac{5}{3}}$ （$\because 1 < k < \sqrt{2}$）、このとき $G\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{1}{3}\right)$

以上より $\triangle OPQ$ は $k = \sqrt{\frac{5}{3}}$ のとき最大となり、そのとき重心は $\left(\frac{\sqrt{15}}{9}, \frac{1}{3}\right)$

② C_1, C_2 の中心を A_1, A_2 とする



(1) C_1, C_2 の半径を r_1, r_2 とすると、

$$r_1 = \sin 2\theta \sin\theta = 2\sin^2\theta\cos\theta$$

右図のように B_1, B_2, H を定めると

$\angle A_1A_2H = \theta$ なので

$$\sin\theta = \frac{A_1H}{A_1A_2} = \frac{A_1B_1 - A_2B_2}{r_1 + r_2}$$

$$= \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \qquad \therefore\ r_2 = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} r_1 = \underline{\frac{2\sin^2\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}}$$

(2) C_1 と C_2 の接点を D とする。

$$PQ = 2QD = 2\times OD\tan\theta = 2(OA_1 - AD)\tan\theta$$

$$= 2(\sin 2\theta - \sin 2\theta\sin\theta)\tan\theta$$

$$= 4\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 4\sin^2\theta(1-\sin\theta)$$

$\sin\theta = t$ とおくと　$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より　$0 < \sin\theta = t < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$PQ = 4t^2(1-t)$$

これを $f(t)$ とおく。

$$f'(t) = 4t(2-3t)$$

$f'(t) = 0$ となるのは $t = 0, \frac{2}{3}$

よって $f(t)$ の増減は右のようになる

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(t)$	/	$\nearrow$	$\frac{16}{27}$	$\searrow$	/

$0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$ において　$f(t) \leqq f(\frac{2}{3}) = \frac{16}{27}$

よって PQ の長さの最大値は $\frac{16}{27}$

(3) (2) より最大となるのは $t = \frac{2}{3} = \sin\theta$.　このとき、$\cos\theta = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\overrightarrow{OD} = OD\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = (OA_1 - AD)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = \sin 2\theta(1-\sin\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = 2\times\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix} = \frac{4\sqrt{5}}{81}\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\ 2\end{pmatrix}$$

mの法線ベクトルの1つは $(\cos\theta, \sin\theta)$ （$\because$ $OA_1 \perp m$）

したがって m は

$$\frac{\sqrt{5}}{3}\left(x - \frac{20}{81}\right) + \frac{2}{3}\left(y - \frac{8\sqrt{5}}{81}\right) = 0$$

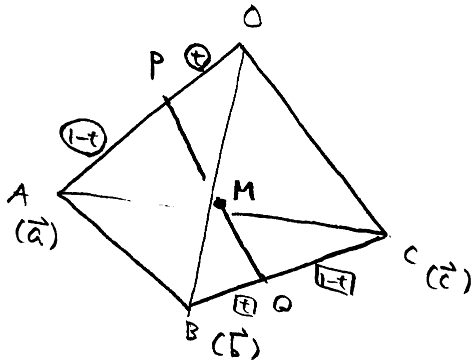
$$\sqrt{5}x - \frac{20}{81}\sqrt{5} + 2y - \frac{16}{81}\sqrt{5} = 0$$

$$\sqrt{5}x + 2y - \frac{4}{9}\sqrt{5} = 0$$

$$\underline{9\sqrt{5}x + 18y - 4\sqrt{5} = 0}$$

③

(1) $\overrightarrow{OP} = t\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = t\vec{c} + (1-t)\vec{b}$



$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$

$= \underline{\frac{1}{2}t\vec{a} + \frac{1}{2}(1-t)\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c}}$ //

(2) $|\overrightarrow{OM}|^2 = \frac{1}{4}|t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}|^2$

$= \frac{1}{4}\left(t^2|\vec{a}|^2 + (1-t)^2|\vec{b}|^2 + t^2|\vec{c}|^2 + 2t(1-t) + 2t^2 + 2t(1-t)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(t^2(|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2) + (1-t)^2|\vec{b}|^2 + 4t - 2t^2\right)$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}t\vec{a} - \frac{1}{2}(1+t)\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c}$

$|\overrightarrow{BM}|^2 = \frac{1}{4}\left(t^2(|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2) + (1+t)^2|\vec{b}|^2 - 2t^2 - 4t\right)$

$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{BM}|^2$ より

$(1-t)^2|\vec{b}|^2 + 4t = (1+t)^2|\vec{b}|^2 - 4t.$

$4t|\vec{b}|^2 = 8t$

$|\vec{b}|^2 = 2.$ $\quad\therefore |\vec{b}| = \sqrt{2}.$ $\quad$ <u>OBの長さは$\sqrt{2}$</u> //

(3) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(t-2)\vec{a} + \frac{1}{2}(1-t)\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c}$

$|\overrightarrow{AM}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2$ が成り立つので

$(t-2)^2|\vec{a}|^2 + \cancel{(1-t)^2|\vec{b}|^2} + \cancel{t^2|\vec{c}|^2} + 2(t-2)(1-t) + 2t(t-2) + 2t(1-t)$

$= t^2|\vec{a}|^2 + \cancel{(1-t)^2|\vec{b}|^2} + \cancel{t^2|\vec{c}|^2} + 4t - 2t^2$

$(4-4t)|\vec{a}|^2 - 4t^2 + 2t - 4 = 0$

$|\vec{a}|^2 = \frac{2t^2 - t + 2}{2-2t}$

同様に

$|\overrightarrow{CM}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2$ より $|\vec{c}|^2 = \frac{2t^2 - t + 2}{2-2t}$ $\quad\therefore |\vec{a}| = |\vec{c}|$

$\cos\angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|} = \frac{1}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, $\cos\angle BOC = \frac{1}{|\vec{c}||\vec{b}|}$ なので

$\angle AOB = \angle BOC.$

以上より $AO = CO$, OB 共通, $\angle AOB = \angle BOC$ なので.

二辺狭角相当より $\triangle OAB$ と $\triangle OCB$ は合同である.

⑥

(1) $|z-1| = |z+1|$

$\Leftrightarrow \ (z-1)(\bar{z}-1) = (z+1)(\bar{z}+1)$

$\Leftrightarrow \ -z-\bar{z} = z+\bar{z}$

$\Leftrightarrow \ z = -\bar{z}$

これは z が純虚数であることを示しているので z の全体は虚軸である。

(2)

$w = \dfrac{z+1}{z} \ \Leftrightarrow \ zw - z = 1 \ \cdots ①$

$w \neq 1$ のとき $z = \dfrac{1}{w-1}$

z は虚軸上を動くが(1)より、このとき $|z-1| = |z+1|$

ここに $z = \dfrac{1}{w-1}$ を代入する。

$$\left|\frac{1}{w-1} - 1\right| = \left|\frac{1}{w-1} + 1\right|$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{|2-w|}{|w-1|} = \frac{|w|}{|w-1|}$$

$$\Leftrightarrow \ |w-2| = |w|$$

$$\Leftrightarrow \ (w-2)(\bar{w}-2) = w\bar{w}$$

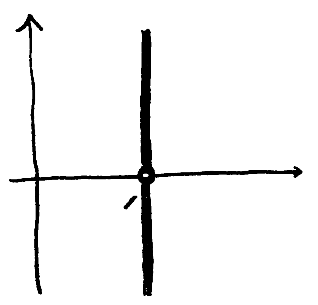
$$\Leftrightarrow \ -2w-2\bar{w}+4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ w+\bar{w} = 2.$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{w+\bar{w}}{2} = 1$$

これは w の実部が 1 であることを示している。($w=1$ を除く)

①は $w=1$ を満たさないので、もとめる図形は右のようになる



(3) $w = \dfrac{z+1}{z-a}$ より

$$zw - aw = z+1$$

$$z(w-1) = 1+aw$$

ここで $w=1$ とすると $1+a=0$ となるが a は正の実数なので、これは成りたないので $w \neq 1$.

このとき、

$$z = \frac{1+aw}{w-1}$$

これを (1) に代入

$$\left|\frac{1+aw}{w-1} - 1\right| = \left|\frac{1+aw}{w-1} + 1\right|$$

$$\frac{|1+aw-w+1|}{|w-1|} = \frac{|1+aw+w-1|}{|w-1|}$$

$$(aw-w+2)(a\bar{w}-\bar{w}+2) = (aw+w)(a\bar{w}+\bar{w})$$

$$\cancel{a^2w\bar{w}} - aw\bar{w} + 2aw - aw\bar{w} + \cancel{w\bar{w}} - 2w + 2a\bar{w} - 2\bar{w} + 4$$
$$= \cancel{a^2w\bar{w}} + aw\bar{w} + aw\bar{w} + \cancel{w\bar{w}}$$

$$4aw\bar{w} - 2aw - 2a\bar{w} + 2w + 2\bar{w} - 4 = 0$$

$$w\bar{w} - \frac{a-1}{2a}w - \frac{a-1}{2a}\bar{w} - \frac{1}{a} = 0$$

$$\left(w - \frac{a-1}{2a}\right)\left(\bar{w} - \frac{a-1}{2a}\right) = \frac{(a-1)^2}{4a^2} + \frac{1}{a}$$

$$\left|w - \frac{a-1}{2a}\right| = \frac{a+1}{2a} \quad (w \neq 1)$$

中心 $\dfrac{a-1}{2a}$ 半径 $\dfrac{a+1}{2a}$ の円周 ただし、$w=1$ を除く