① 4以外の解をα, βとする

(i) 4, α, βの順に等比数列になっているとき、

等比中項の公式より　$\alpha^2 = 4\beta$　…①

解と係数の関係より　$4+\alpha+\beta=-6$,　$4\alpha+\alpha\beta+4\beta=-p$,　$4\alpha\beta=q$　…②

これらに①より$\beta=\frac{1}{4}\alpha^2$を$4+\alpha+\beta=-6$に代入, 4倍して

$\alpha^2+4\alpha+40=0$

この判別式は$D/4=4-40<0$だから, αは存在しない

(ii) α, 4, βの順に等比数列になっているとき、

$4^2=\alpha\beta$

これと$\alpha+\beta=-10$より, α, βは

$t^2+10t+16=0$の2つの解となるので$\alpha, \beta=-2, -8$

このとき②より　$p=8-16+32=24$,　$q=64$

α, β, 4の順は(i)と同等, α, βの順をいれかえても同じこと

よって他の2つの解は, -2, -8,　$p=24$,　$q=64$

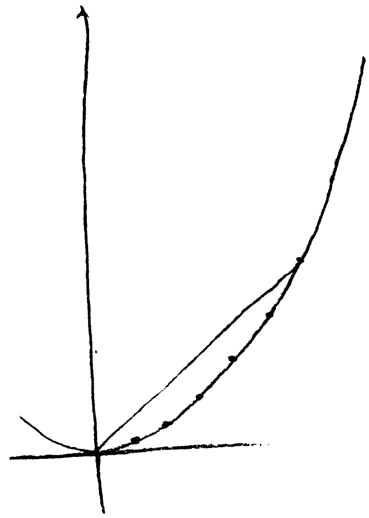
② (1) $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ とする

$\overrightarrow{AB} = (b-a,\ b^2-a^2)$. $\overrightarrow{AC} = (c-a,\ c^2-a^2)$

$S = \frac{1}{2}\left|(b-a)(c^2-a^2) - (b^2-a^2)(c-a)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|(b-a)(c-a)(c+a) - (b-a)(b+a)(c-a)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|(b-a)(c-a)(c-b)\right|$



(2) $a=1,\ b=2,\ c=3$ のとき最小

$S = \frac{1}{2}\left|1\times1\times2\right| = 1$

$a=1,\ b=6$ のとき

$S = \frac{1}{2}\left|5(c-1)(c-6)\right|$

$= \frac{5}{2}\left|\left(c-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}\right|$

だから、$c=3$ または 4 のとき最大 $S=15$

最大値は 15、最小値は 1

(3) $a<b<c$ に限定すること

a	b	c	S	偶奇
1	2	3	$\frac{1}{2}\times1\times1\times2=1$	×
1	2	4	$\frac{1}{2}\times1\times2\times3=3$	×
1	2	5	$\frac{1}{2}\times1\times3\times4=6$	○
1	2	6	$\frac{1}{2}\times1\times4\times5=10$	○
1	3	4	$\frac{1}{2}\times2\times1\times3=3$	×
1	3	5	$\frac{1}{2}\times2\times2\times4=8$	○
1	3	6	$\frac{1}{2}\times2\times3\times5=15$	×
1	4	5	$\frac{1}{2}\times3\times1\times4=6$	○
1	4	6	$\frac{1}{2}\times3\times2\times5=15$	×
1	5	6	$\frac{1}{2}\times4\times1\times5=10$	○
2	3	4	$\frac{1}{2}\times1\times1\times2=1$	×
2	3	5	$\frac{1}{2}\times1\times2\times3=3$	×
2	3	6	$\frac{1}{2}\times1\times3\times4=6$	○
2	4	5	$\frac{1}{2}\times2\times1\times3=3$	×
2	4	6	$\frac{1}{2}\times2\times2\times4=8$	○
2	5	6	$\frac{1}{2}\times3\times1\times4=6$	○

a	b	c	S	偶奇
3	4	5	$\frac{1}{2}\times1\times1\times2=1$	×
3	4	6	$\frac{1}{2}\times1\times2\times3=3$	×
3	5	6	$\frac{1}{2}\times2\times1\times3=3$	×
4	5	6	$\frac{1}{2}\times1\times1\times2=1$	×

$\frac{8}{{}_6C_3} = \frac{2}{5}$

③ $f(x)=\log(x+1)+\int_0^x f(x-t)\sin t\,dt$

$x-t=u$ とおく。 $\begin{array}{c|c} t & 0\to x \\ \hline u & x\to 0 \end{array}$ $\dfrac{du}{dt}=-1$

$$f(x)=\log(x+1)+\int_x^0 f(u)\sin(x-u)(-du)$$

$$=\log(x+1)+\int_0^x f(u)(\sin x\cos u-\cos x\sin u)\,du$$

$$=\log(x+1)+\sin x\int_0^x f(u)\cos u\,du-\cos x\int_0^x f(u)\sin u\,du \quad \cdots①$$

両辺を x で微分

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\cos x\int_0^x f(u)\cos u\,du+\cancel{\sin x f(x)\cos x}+\sin x\int_0^x f(u)\sin u\,du\cancel{-\cos x f(x)\sin x}$$

$$=\frac{1}{x+1}+\cos x\int_0^x f(u)\cos u\,du+\sin x\int_0^x f(u)\sin u\,du \quad \cdots②$$

両辺を x で微分

$$f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\sin x\int_0^x f(u)\cos u\,du+\cos x\int_0^x f(u)\cos u\,du+f(u)$$

①を代入

$$f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\log(x+1)$$

x で積分. $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+(x+1)\log(x+1)-x+C_1$ （C_1 は積分定数）

②で $x=0$ とすると $f'(0)=1$ となることから

$$f'(0)=1+1\times\log 1-0+C_1=1 \quad より \quad C_1=0$$

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+(x+1)\log(x+1)-x$ を積分

$$f(x)=\log(x+1)+\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1)-\int\frac{1}{2}(x+1)^2\times\frac{1}{x+1}\,dx-\frac{1}{2}x^2$$

$$=\log(x+1)+\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1)-\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{1}{2}x^2+C_2$$ （C_2 は積分定数）

①で $x=0$ とすると $f(0)=0+0+0=0$ となるので よって $x=0$ のとき

$$f(0)=0+0-\frac{1}{4}-0+C_2=0 \quad \therefore C_2=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ f(x)=\underline{\left(\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}\right)\log(x+1)-\frac{1}{4}(3x^2+2x)}$$

④ (1) $z = x + yi$ とおく。

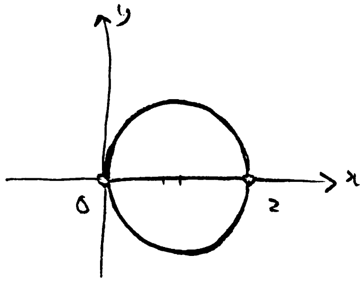
$$w = \frac{1}{|z|^2 - 2z} = \frac{1}{z\bar{z} - 2z} = \frac{z\bar{z} - 2\bar{z}}{(z\bar{z} - 2z)(z\bar{z} - 2\bar{z})}$$

$$= \frac{|z|^2 - 2\bar{z}}{|z|^4 - 4|z|^2}$$

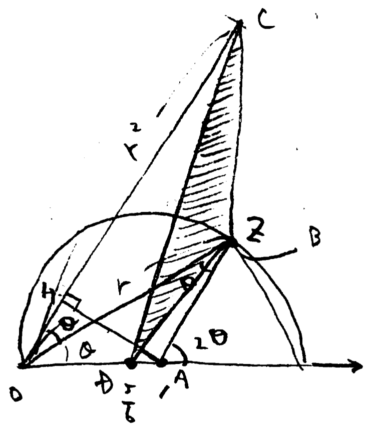
これが純虚数となるとき $|z|^2 - 2\bar{z} = x^2 + y^2 - 2x + 2yi$ が純虚数だから

$$x^2 + y^2 - 2x = 0. \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

よって 右図の円を描く ($z = 0, 2$ は除く)



(2)



$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

D, A, B, C, H を図のように定め

$$AH = \cos 2\theta.$$

$$\triangle ABC = (1 + r^2) \times AH \times \frac{1}{2}$$

$$\triangle ADB = 1 \times AH \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$$

$$\triangle OCD = r^2 \times AH \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{2}$$

$$\triangle DBC = \frac{1}{2}(1 + r^2)\cos 2\theta - \frac{1}{12}\cos 2\theta - \frac{5}{12} r^2 \cos 2\theta$$

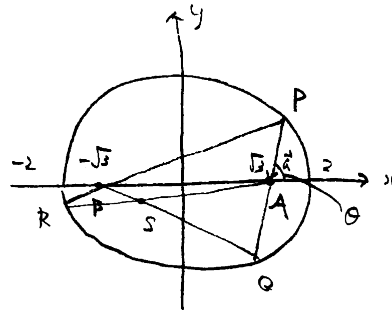
Bは円上にあるので $OB = r = 2\cos\theta$.

⋮

⑤ (1) だ円は $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とおける

焦点の条件から $2^2-b^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2$ $b^2=1$

∴だ円は $\frac{x^2}{2^2}+y^2=1$.



だ円の性質より

$2-\sqrt{3} \leqq l \leqq 2+\sqrt{3}$

(2) $PA=l$. $AQ=sl$. $\angle xAP=\theta$ とする

$AP+BP=4$ だから $PB=4-l$. $AB=2\sqrt{3}$. $\angle PAB=\pi-\theta$.

$\triangle ABP$ について余弦定理より.

$$(4-l)^2=(2\sqrt{3})^2+l^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot l\cdot\cos(\pi-\theta)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\,l\cos\theta+2l=1 \ldots ①$$

$AQ=sl$, $BQ=4-sl$, $AB=2\sqrt{3}$, $\angle QAB=\theta$ だから

$\triangle QAB$ について余弦定理を用いて

$$(4-sl)^2=(2\sqrt{3})^2+(sl)^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot sl\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad 2sl-\sqrt{3}\,sl\cos\theta=1 \ldots ②$$

① より $\cos\theta=\frac{1-2l}{\sqrt{3}\,l}$ を ② に代入

$$2sl-s+2sl=1$$

$$\underline{s=\frac{1}{4l-1}}$$

$PB=4-l$ だから同様に $t=\frac{1}{4PB-1}=\frac{1}{4(4-l)-1}=\underline{\frac{1}{15-4l}}$

(3) メネラウスの定理より

$\frac{PQ}{QA}\times\frac{AS}{SR}\times\frac{RB}{BP}=1$ より $\frac{1+s}{s}\times\frac{AS}{SR}\times\frac{t}{1}=1$ $\Leftrightarrow$ $\frac{AS}{SR}=\frac{s}{t(1+s)}$

$$\overrightarrow{PS}=\frac{SR}{AS+SR}\vec{a}+\frac{AS}{AS+SR}(1+t)\vec{b}$$

$$=\frac{1}{\frac{AS}{SR}+1}\vec{a}+\frac{\frac{AS}{SR}}{\frac{AS}{SR}+1}(1+t)\vec{b}$$

$$= \frac{1}{\frac{s}{t(1+s)}+1}\vec{a} + \frac{\frac{s}{t(1+s)}}{\frac{s}{t(1+s)}+1}(1+t)\vec{b}$$

$$= \frac{t+st}{s+t+st}\vec{a} + \frac{s+st}{s+t+st}\vec{b}$$

$$= \frac{\frac{1}{15-4\ell}+\frac{1}{(4\ell-1)(15-4\ell)}}{\frac{1}{4\ell-1}+\frac{1}{15-4\ell}+\frac{1}{(4\ell-1)(15-4\ell)}}\vec{a} + \frac{\frac{1}{4\ell+1}+\frac{1}{(4\ell-1)(15-4\ell)}}{\frac{1}{4\ell+1}+\frac{1}{15-4\ell}+\frac{1}{(4\ell-1)(15-4\ell)}}\vec{b}$$

$$= \frac{4\ell-\cancel{1}+\cancel{1}}{15-\cancel{4\ell}+\cancel{4\ell}-\cancel{1}+\cancel{1}}\vec{a} + \frac{15-4\ell+1}{15}\vec{b}$$

$$= \frac{4}{15}\ell\vec{a} + \frac{16-4\ell}{15}\vec{b} \qquad \underline{u = \frac{4}{15}\ell,\quad v = \frac{16-4\ell}{15}}$$

(4) メネラウスの定理より

$$\frac{PR}{RB}\times\frac{BS}{SQ}\times\frac{QA}{AP} = 1 \Leftrightarrow \frac{1+t}{t}\times\frac{BS}{SQ}\times\frac{s}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{BS}{SQ} = \frac{t}{(1+t)s}$$

$\angle ASB = \theta'$ として、 $T_1 = \frac{1}{2}AS\times SB\times\sin\theta'$

$T_2 = \frac{1}{2}SR\times SQ\times\sin\theta'$

$8T_1 = 3T_2$ に代入.

$$8\times\cancel{\frac{1}{2}}AS\times SB\times\cancel{\sin\theta'} = 3\times\cancel{\frac{1}{2}}SR\times SQ\times\cancel{\sin\theta'}$$

$$8\times\frac{AS}{SR}\times\frac{SB}{SQ} = 3$$

$$\frac{\cancel{s}}{\cancel{t}(1+s)}\times\frac{\cancel{t}}{\cancel{s}(1+t)} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{4\ell-1}}\times\frac{1}{1+\frac{1}{15-4\ell}} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{4\ell-1}{\cancel{4}\ell}\times\frac{15-4\ell}{16-4\ell} = \frac{3}{\cancel{8}\,2}$$

$$-16\ell^2+64\ell-15 = 24\ell-6\ell^2$$

$$10\ell^2-40\ell+15=0$$

$$2\ell^2-8\ell+3=0$$

$$\ell = \frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$$

いずれも (1)を 満たすので

$$\underline{\ell = \frac{4\pm\sqrt{10}}{2}}$$