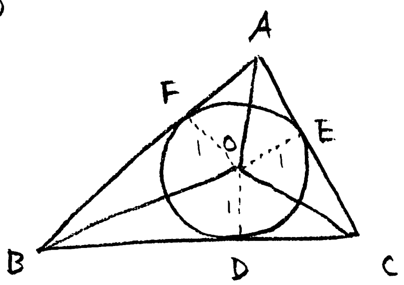
①



円の中心を O.

$\triangle ABC$ と円の接点を左のように D, E, F と定める

$\angle CAB = 2x = 2\angle OAF$

だから $\angle OAF = x$

F は接点なので $\angle OFA = 90°$.

よって $AF = \dfrac{1}{\tan x}$

同様に $AE = \dfrac{1}{\tan x}$

$BF = BD = \dfrac{1}{\tan y}$

$CE = CD = \dfrac{1}{\tan z}$

$\triangle AOF$ の面積は $\frac{1}{2}AF \cdot FO = \dfrac{1}{2\tan x}$

$\triangle AOE$ の面積も $\dfrac{1}{2\tan x}$

同様に $\triangle BOF$ の面積は $\dfrac{1}{2\tan y}$

$\triangle COD$ の面積は $\dfrac{1}{2\tan z}$

以上より

$$S = \triangle AOF + \triangle AOE + \triangle BOF + \triangle BOD + \triangle COD + \triangle COE$$

$$= \frac{1}{2\tan x} \times 2 + \frac{1}{2\tan y} \times 2 + \frac{1}{2\tan z} \times 2$$

$$= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

証明終

(2) $z = \frac{\pi}{6}$ のとき　このとき $\left(x + y + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}\right.$ より $\left. x + y = \frac{\pi}{3}\right)$

$$S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \sqrt{3}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} + \sqrt{3}$$

$$= \frac{\cos x \sin y + \cos y \sin x}{\sin x \sin y} + \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y} + \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin x \sin y} + \sqrt{3}$$

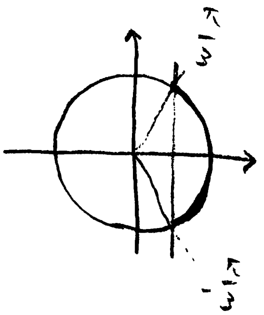
$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sin x \sin y} + \sqrt{3} \quad \cdots ①$$

ここで $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\left\{\cos(x+y) - \cos(x-y)\right\}$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(x-y)$$

$0 < x < \frac{\pi}{3}$, $0 < y < \frac{\pi}{3}$, $x+y = \frac{\pi}{3}$ より

$$-\frac{\pi}{3} < x-y < \frac{\pi}{3}$$



したがって $\frac{1}{2} < \cos(x-y) \leqq 1$

$$0 < -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(x-y) \leqq \frac{1}{4}$$

よって ① が最小となるのは $\sin x \sin y = \frac{1}{4}$ のときで、

このとき

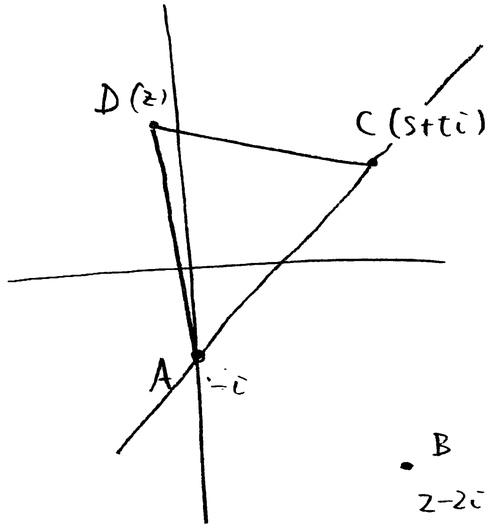
$$S = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

また等号は $x - y = 0$ のとき、すなわち $x = y = \frac{\pi}{6}$ のとき

<u>Sの最小値は $3\sqrt{3}$, このとき $(x, y) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$</u>

②

(1) Cは ACに関してBと反対側に
あるので右図のように CをAを中心に
60°回転させた点となっている



$$z = (s+ti+i)(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) - i$$

$$= \frac{1}{2}(s+(t+1)i)(1+\sqrt{3}i) - i$$

$$= \frac{1}{2}(s+\sqrt{3}si + (t+1)i - \sqrt{3}(t+1)) - i$$

$$= \underline{\frac{1}{2}(s-\sqrt{3}t-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(\sqrt{3}s+t-1)i}$$

(2) $\delta \neq \alpha$ なので、与式を $(\delta-\alpha)^2$ で割ると

$$4\left(\frac{\beta-\alpha}{\delta-\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{\beta-\alpha}{\delta-\alpha}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{\beta-\alpha}{\delta-\alpha} = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2}(\cos(\pm 60^\circ) + i\sin(\pm 60^\circ))$$

$$\delta - \alpha = (\beta-\alpha)\times 2(\cos(\mp 60^\circ) + i\sin(\mp 60^\circ))$$

$$\delta = (2-i)(1\pm\sqrt{3}i) - i$$

$$= 2+2\sqrt{3}i - i + \sqrt{3} - i, \quad 2-2\sqrt{3}i - i - \sqrt{3} - i$$

$$= 2+\sqrt{3} + (2\sqrt{3}-2)i, \quad 2-\sqrt{3} - (2\sqrt{3}+2)i$$

δは第1象限にあるので　$\delta = 2+\sqrt{3} + 2(\sqrt{3}-1)i$

このとき zは　$z = \frac{1}{2}(2+\sqrt{3} - 2(3-\sqrt{3}) - \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(2\sqrt{3}+3+2\sqrt{3}-2-1)i$

$$= -2+\sqrt{3} + 2\sqrt{3}i$$

(3) $AB = |2 - i| = \sqrt{5}$

$AC = 2AB = 2\sqrt{5} = AD = CD$

$BC = \sqrt{3}\,AB = \sqrt{15}$

$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{35}$

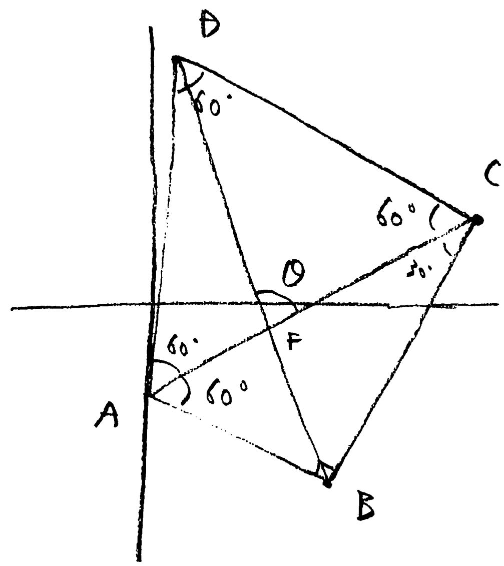
$BF : FD = AB : AD = 1 : 2$ より

$FD = \frac{2}{3}\sqrt{35}$

正弦定理より

$$\frac{DF}{\sin 60^\circ} = \frac{CD}{\sin\theta} \iff \sin\theta = \frac{\cancel{2}\sqrt{5}}{\frac{\cancel{2}}{3}\sqrt{35}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{27}{28}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$



③

(1) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$ $(x > 0)$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)x^2 - (x-1)(x-2)\times 2x}{x^4} = \frac{3x-4}{x^3}$$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{4}{3}$ のとき，$f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{8}$

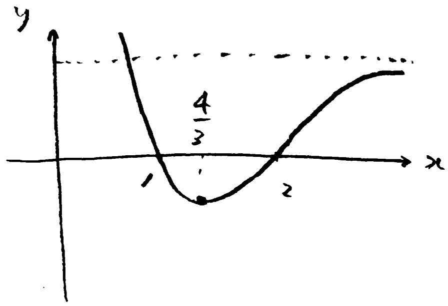
$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{x^2-3x+2}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = 1$$

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$

$f(x)$ の増減は右のとおりで

グラフは右下のようになる



$t > \frac{4}{3}$ のとき、接線の傾きは正となるが、

このとき $x \to \infty$ とすると $y \to \infty$ となるので、

y座標は必ず1を超えてしまい、接線 l と

C は交点を持ってしまう。

$t = \frac{4}{3}$ のとき l は $y = -\frac{1}{8}$ となり、これは C と共有点を他に持たない。

よって t の最大値は $\frac{4}{3}$ である。

(2)

$$l_k : y = k\left(x - \frac{4}{3}\right) - \frac{1}{8}$$

これと C を連立すると $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2} = k\left(x - \frac{4}{3}\right) - \frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2-24x+16}{8x^2} = k\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow (3x-4)^2 = 8kx^2\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)\left(8kx^2 - 3(3x-4)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)\left(8kx^2 - 9x + 12\right) = 0$$

$x>0$, $x \neq \frac{4}{3}$ において、$8kx^2-9x+12=0$ の解の個数を調べる

$g(x)=8kx^2-9x+12$ とおく。

(i) $k=0$ のとき、　$g(x)=-9x+12=-9\left(x-\frac{4}{3}\right)$

となるので、$g(x)=0$ 解をもたない（∵ $x \neq \frac{4}{3}$ で調べている）

(ii) $k \neq 0$ のとき、

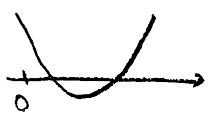
判別式を D として

$D=81-384k$

$g(0)=12>0$,

軸は $\frac{9}{16k}$

軸が正のとき（$k>0$ のとき）



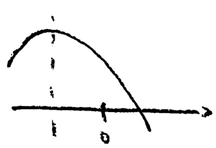
$g\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{128}{9}k \neq 0$ だから

$D>0$ のとき　2解　　$0<k<\frac{81}{384}=\frac{27}{128}$

$D=0$　〃　　1解　　$k=\frac{27}{128}$

$D<0$　〃　　0解　　$k>\frac{27}{128}$

軸が負のとき



$g(0)>0$ だから 必ず1解をもつ

$x=\frac{4}{3}$ の解を含めてまとめると、

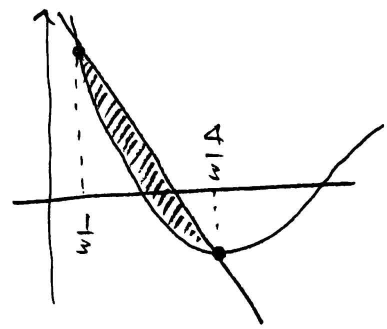
$$\begin{cases} 0<k<\frac{27}{128} \text{ のとき} & \text{共有点は3ヶ所} \\ k=\frac{27}{128},\ k<0 \text{ のとき} & \text{〃 2ヶ所} \\ k>\frac{27}{128} \text{ のとき} & \text{〃 1ヶ所} \end{cases}$$

(3) $k=\frac{27}{128}$ のとき $x\neq\frac{4}{3}$ となる共有点は $\frac{\cancel{8}}{\cancel{16}}\times\frac{\cancel{128}^{8}}{\cancel{27}_{3}}=\frac{8}{3}$

となるので不適

したがって $k<0$ のときで $g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{9}k-3+12=0$ より $k=-\frac{81}{8}$

このとき l_k は $y=-\frac{81}{8}x+\frac{25}{2}$



もとめる面積をSとして

$$S=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}}-\frac{81}{8}x+\frac{25}{2}-\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}}-\frac{81}{8}x+\frac{23}{2}+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}dx$$

$$=\left[-\frac{81}{16}x^2+\frac{23}{2}x+3\log x+\frac{2}{x}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}}$$

$=$

成立していなければならない

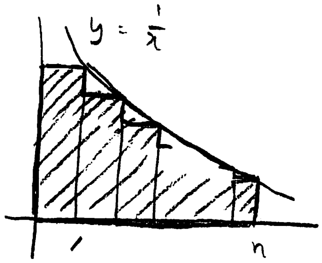
したがって最大数 $2n$ の分母は 1 に定まり

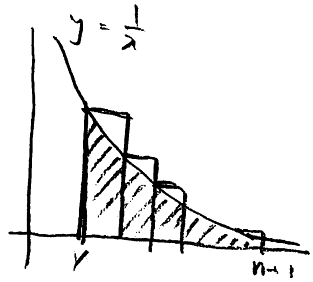
次の $2n-1$ の分母は 2… というように決まる

(3)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2n-k+1}{k}$$ としてよい

$$S_n = -n + (2n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$





$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$$

$$= 1 + \log n$$

$$= 1 + \log n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \log(n+1)$$

よって $$-n + (2n+1)\log(n+1) < S_n < -n + (2n+1)(\log n + 1)$$

$$-\frac{1}{\log n} + \left(2+\frac{1}{n}\right)\frac{\log(n+1)}{\log n} < \frac{S_n}{n\log n} < -\frac{1}{\log n} + \left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{\log n}\right)$$

はさみうちの原理より $$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log n} = 2.$$