近畿大2022 2/13

1 (1) $0.\dot{0}0\dot{4} \times 1000 - 0.\dot{0}0\dot{4} = 4$ より $0.\dot{0}0\dot{4} = \frac{4}{999}$

同様に $0.\dot{0}2\dot{3} = \frac{23}{999}$

$$0.\dot{0}0\dot{4} + 0.\dot{0}2\dot{3} = \frac{4}{999} + \frac{23}{999} = \frac{27}{999} = \mathbf{\frac{1}{37}}$$

$0.0\dot{0}\dot{4} \times 100 - 0.0\dot{0}\dot{4} = 0.4$ $\quad 0.0\dot{0}\dot{4} = \frac{0.4}{99} = \frac{4}{990}$

同様に $0.0\dot{2}\dot{3} = \frac{23}{990}$

$$0.0\dot{0}\dot{4} + 0.0\dot{2}\dot{3} = \frac{27}{990} = \mathbf{\frac{3}{110}}$$

(2)

	1〜6月	7〜12月	
男	8	11	19
女	12	9	21
	20	20	

(i) $\mathbf{\frac{9}{20}}$ $\quad$ (ii) $\frac{\cancel{8}}{\cancel{40}_{5}} \times \frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{39}_{13}} \times 2 = \mathbf{\frac{8}{65}}$

(3) $\vec{AB} = k\vec{AC}$ を満たす実数kが存在する.

$$\begin{pmatrix} a-2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -3 \\ b-3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad k = \frac{1}{3} \quad a = \mathbf{1}\ ,\ b = \mathbf{0}$$

lは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OA} + t\vec{AB}$ （tは任意の実数）

と表せるので $\quad l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pはl上にあるので $P(2-t, 3-t, -1+t)$ とおくことができる.

$$|\vec{OP}| = \sqrt{(2-t)^2 + (3-t)^2 + (-1+t)^2} = \sqrt{3t^2 - 12t + 14} = \sqrt{3(t-2)^2 + 2}$$

したがって$t=2$で最小となり最小値は $\mathbf{\sqrt{2}}$

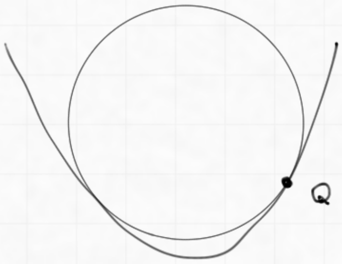
このとき $P(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$

(4) $\tan^2 x = X$ とおく. $\quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ より $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + X$ なので.

$$y = 16X - 2(X+1)^2 - 9 = -2X^2 + 12X - 11 = -2(X-3)^2 + 7$$

$X = 3$ すなわち $\tan x = \pm\sqrt{3}$, $x = \pm\mathbf{\frac{1}{3}}\pi$ のとき. 最大値$\mathbf{7}$をとる

11



$C: \quad x^2+(y-a)^2=r^2$

$y=x^2$と連立． $y^2-2ay+y+a^2-r^2=0 \quad \cdots①$

①が $y\geqq 0$ の範囲で重解をもつ．

判別式をDとして $D/4=(1-2a)^2-4a^2+4r^2=0$

$\Leftrightarrow \quad 1-4a+4r^2=0 \cdots ②$

軸は $y=\dfrac{2a-1}{2}$ だから $\dfrac{2a-1}{2}\geqq 0 \quad \therefore\ a\geqq\dfrac{1}{2}$

$\cdots ③$

(1) $a=2$のとき ②より $r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

このとき①は $y^2-3y+\dfrac{9}{4}=0 \quad y=\dfrac{3}{2} \quad \therefore\ x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(2) $r=1$のとき ②より $a=\dfrac{5}{4}$

このとき①は $y^2-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{9}{16}=0 \quad y=\dfrac{3}{4} \quad \therefore\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

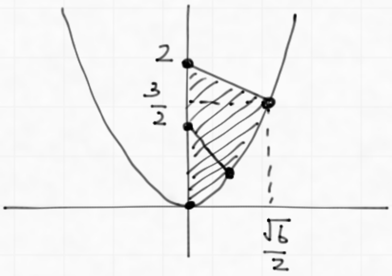
(3) ③より $0<a\leqq\dfrac{1}{2}$

(4) ②より $r=\sqrt{\dfrac{4a-1}{4}}=\sqrt{a-\dfrac{1}{4}}$

このとき①は $y^2-(2a-1)y+\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2=0 \quad y=a-\dfrac{1}{2} \quad x=\sqrt{a-\dfrac{1}{2}}$

(5) $0<a\leqq\frac{1}{2}$のとき Qのx座標は0

$\frac{1}{2}<a\leqq 2$のとき． (4)より $0<x\leqq\sqrt{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$



$S=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}-0\right)^3$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{8}=\dfrac{5\sqrt{6}}{8}$

111

(1) $a = 5(1+5+5^2+5^3+5^4)+1$ だから $a \equiv \mathbf{1} \pmod 5$

$a \equiv 1+5+5+5+5+5 \equiv 26 \equiv \mathbf{6} \pmod{10}$

(2) $a = 1+5+5^2+5^3(1+5+5^2) = 31\cdot(5^3+1) = 31\times 126 = 2^1\cdot 3^2\cdot 7^1\cdot 31^1$ **31**

(3) $(1+1)\times(2+1)\times(1+1)\times(1+1) = \mathbf{24}$

$b = 5^{12}(1+5+5^2)+5^{15}(1+5+5^2) = 31\times 5^{12}\times(1+5^3) = 2^1\cdot 3^2\cdot 5^{12}\cdot 7^1\cdot 31^1$

$(1+1)\times(2+1)\times(12+1)\times(1+1)\times(1+1) = \mathbf{312}$

(4) bは5^3を素因数にもつので、bを2^3で割った余りを考えればよい。

$b \equiv 2\times 3^2\times 5^{12}\times 7^1\times 31$

$\equiv 2\times 1\times 1^6\times(-1)\times 7 \equiv -14 \equiv 2 \pmod 8$

bを1000で割った余りは $2\times 5^3 = \mathbf{250}$

(5) $b = 5^{12}a$

$(ma+n)^2 = 5^{12}$ より $ma+n = 5^6$

$a = \dfrac{5^6-1}{5-1}$ だから $\dfrac{m}{4}(5^6-1)+n = 5^6$

$m\cdot 5^6 - 4\cdot 5^6 - m + 4n = 0$ $\therefore m = \mathbf{4},\ n = \mathbf{1}$

(6) $a(4a+1)^2a - (4a+1)^2a - 20 = 16a^4+8a^3+a^2-16a^3-8a^2-a-20$

$= 16a^4-8a^3-7a^2-a-20$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 16 & -72 & 281 & 1125 & \\
\hline
1\quad 4 & 16 & -8 & -7 & -1 & -20 \\
 & 16 & 64 & & & \\
\hline
 & & -72 & -7 & & \\
 & & -72 & -288 & & \\
\hline
 & & & 281 & -1 & \\
 & & & 281 & 1124 & \\
\hline
 & & & & 1125 & -20 \\
 & & & & 1125 & 4500 \\
\hline
 & & & & & 4480
\end{array}
$$

4480 と $a+4$ の最大公約数を考えればよい

$a+4 = 3910$ だから **10**