2020 大阪大

1 (1) 両辺の自然対数をとる

$$\log f(x) = \frac{1}{x+1}\log(x+1)$$

両辺を微分

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}\times\log(x+1) + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}\times(x+1)^{\frac{1}{x+1}} = \{1-\log(x+1)\}(x+1)^{\frac{1}{x+1}-2}$$

$x \geqq 0$ で $f'(x)=0$ となるのは $1-\log(x+1)=0$ すなわち $x=e-1$ のときのみで

$f(x)$ の増減は下のようになる

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
f'	$+$	$+$	0	$-$
f		$\nearrow$		$\searrow$

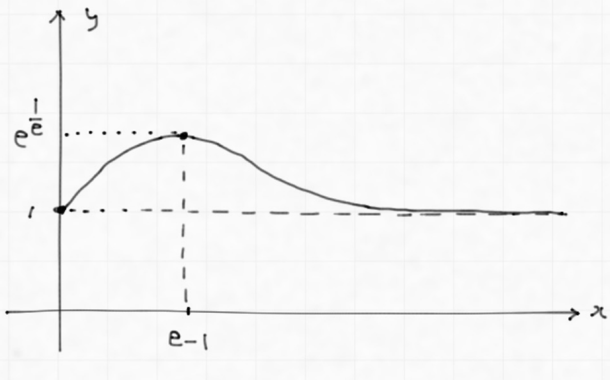
$$f(e-1) = (e-1+1)^{\frac{1}{e}} = e^{\frac{1}{e}}$$

よって $f(x)$ は $x=e-1$ のとき最大で 最大値は $e^{\frac{1}{e}}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\{\log f(x)\} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x+1)}{x+1} = 0$ $\qquad \therefore \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1-\log(x+1)}{(x+1)^2}\times f(x)\right\} = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{\log(x+1)}{x+1}}{x+1}\times f(x)\right\} = 0\times 1 = 0$$

(3) $f(0) = 1^1 = 1.$ $\qquad y=f(x)$ のグラフは下のようになる



2020 大阪大

2. 以下偏角θは $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で考えることとする.

(1) z_2 の偏角は $\frac{\pi}{3}x_1 + \frac{\pi}{3}x_2 = \frac{\pi}{3}(x_1+x_2)$ …①

x_1, x_2 は 1 または −1 または 0 だから、①の値は 0 または $\pm\frac{\pi}{3}$ または $\pm\frac{2}{3}\pi$ となり、

$(x_1, x_2) = (0,1), (0,-1), (1,0), (1,1), (-1,0), (-1,-1)$

よって、もとめる確率は $\frac{4}{6}\times\frac{1}{6}\times 4 + \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 2 = \frac{18}{36} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

(2) z_1〜z_n が実数でない確率を q_n とする

z_1 が実数でないのは $x_1 = \pm 1$ のときだから $q_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$n \geqq 2$ のとき、z_n が実数でないとき z_n の偏角は

$\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2}{3}\pi$

の4つのうちのいずれか。このとき $n+1$ 回目の x_{n+1} について

$\arg z_n = \frac{\pi}{3}$ のとき、$x_{n+1} = 0$ または 1　　$\arg z_n = \frac{2}{3}\pi$ のとき、$x_{n+1} = 0$ または −1

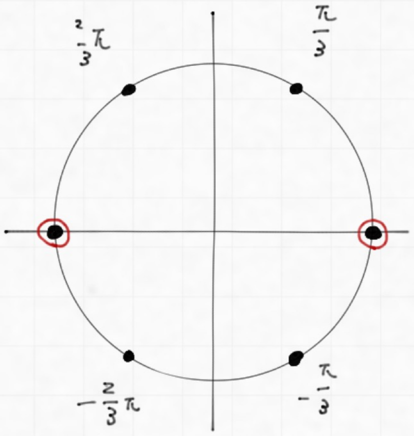
$\arg z_n = -\frac{\pi}{3}$ のとき、$x_{n+1} = 0$ または −1　　$\arg z_n = -\frac{2}{3}\pi$ のとき、$x_{n+1} = 0$ または 1

とならなければいけないので

$q_{n+1} = \frac{5}{6}q_n$

したがって $\{q_n\}$ は 初項 q_1、公比 $\frac{5}{6}$ の等比数列で、その一般項は $q_n = \mathbf{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$

(3)



z_n が実数となるのは $z_n = \pm 1$ のとき、

z_n が実数だったとき、z_{n+1} が実数となるのは、

$\arg Y_n = 0$ のときで、$x_{n+1} = 0$ であり、

その確率は $\frac{4}{6}$

z_n が実数でなかったとき、$\arg z_n = \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2}{3}\pi$ のいずれかで、いずれの場合でも、z_{n+1} が実数となるためには x_{n+1} は 1 または 2 のいずれか一方であることが必要で、その確率は $\frac{1}{6}$

以上より

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{4}{6} + (1-p_n)\times\frac{1}{6} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{6}$$

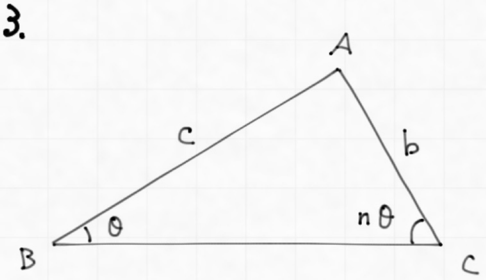
$p_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$, $p_1 = \frac{4}{6}$ より、

$p_n - \frac{1}{3} = \left(\frac{4}{6} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　$p_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1\right\} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

2020 大阪大

3.



$\angle ABC = \theta$ とおくと、条件より $\angle ACB = n\theta$

$\theta + n\theta + \angle A = \pi$ より $(1+n)\theta < \pi$

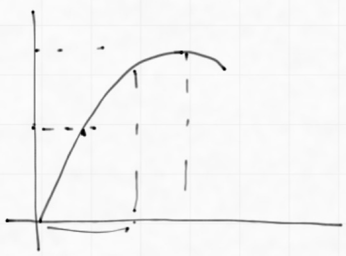
$\therefore\ \theta < \dfrac{\pi}{n+1}$ … $(*)$

nは2以上の自然数だから $\theta < \dfrac{\pi}{2+1} = \dfrac{\pi}{3}$

正弦定理より $\dfrac{b}{\sin\theta} = \dfrac{c}{\sin n\theta} \Leftrightarrow c = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} b$

だから $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ のとき $n \geqq 2$ において

$\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} < n$ を示せばよい… ①



① は $n\sin\theta - \sin n\theta > 0$ と変形できるので、

$f(\theta) = n\sin\theta - \sin n\theta$ とおいて

$f'(\theta) = n\cos\theta - n\cos n\theta$

$= n(\cos\theta - \cos n\theta)$

$= -2n \sin\dfrac{n\theta+\theta}{2} \sin\dfrac{\theta - n\theta}{2}$

$= 2n \sin\dfrac{n+1}{2}\theta\ \sin\dfrac{n-1}{2}\theta$

$(*)$ より

$\theta < \dfrac{\pi}{n+1}$ だから $0 < \dfrac{n+1}{2}\theta < \dfrac{\pi}{2}$

$0 < \dfrac{n-1}{2}\theta < \dfrac{\pi}{2}$

よって $f'(\theta)$ は常に正であり、$f(\theta)$ は単調に増加する。

$f(0) = n \times 0 - 0 = 0$ なので

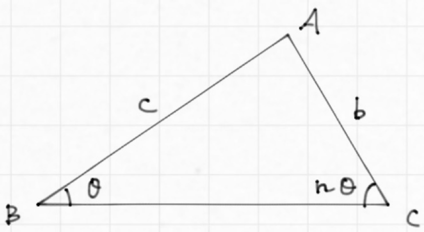
$f(\theta) > f(0) = 0$

以上より、$n\sin\theta - \sin n\theta > 0$ が成り立つので

① は成り立ち、したがって $c < nb$ が成り立つ。

3 (別解)

$\angle ABC = \theta$ と表す.



正弦定理より.

$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{c}{\sin(n\theta)} \iff \frac{c}{b} = \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

ここで三角形の内角の和がπだから $\theta + n\theta < \pi$ が成り立ち. これより $\theta < \frac{\pi}{n+1} \leqq \frac{\pi}{3}$

また $c < nb \iff \frac{c}{b} < n \iff \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} < n \iff \sin(n\theta) < n\sin\theta$

が成り立つので $\sin(n\theta) < n\sin\theta$ が成り立つことを示せばよい.

上記不等式を命題とし. これを数学的帰納法で示す.

(i) $n=2$ のとき.

右辺 − 左辺 $= 2\sin\theta - \sin 2\theta = 2\sin\theta(1-\cos\theta)$

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ だから上式は必ず正の値をとり. $\sin 2\theta < 2\sin\theta$ は成り立っている.

(ii) $n=k$ のとき.

$\sin k\theta < k\sin\theta$ が成り立つと仮定する.

このとき. $\sin(k+1)\theta < (k+1)\sin\theta$ が成り立つことを示す.

$$
\begin{aligned}
&(k+1)\sin\theta - \sin(k+1)\theta \\
&= (k+1)\sin\theta - \sin k\theta\cos\theta - \cos k\theta\sin\theta \\
&> (k+1)\sin\theta - k\sin\theta\cos\theta - \cos k\theta\sin\theta \quad (\because \text{仮定}) \\
&= k\sin\theta(1-\cos\theta) + \sin\theta(1-\cos k\theta) \\
&> 0 \quad \left(\because\ 0<\theta<\tfrac{\pi}{3} \text{ のとき. } \tfrac{1}{2}<\cos\theta<1,\ 0<\sin\theta<\tfrac{\sqrt{3}}{2},\ 1-\cos k\theta \geqq 0\right)
\end{aligned}
$$

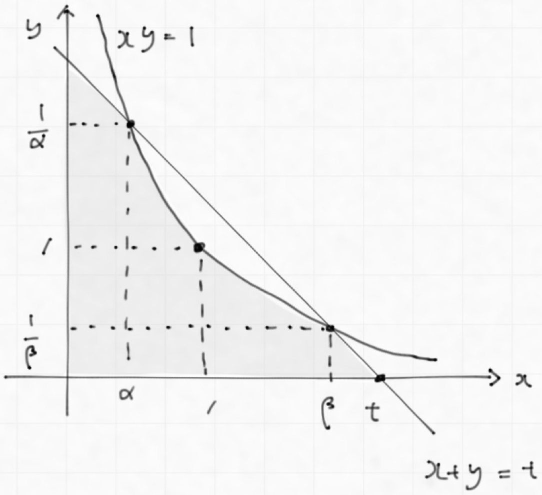
よって仮定の下で $n=k+1$ のときも命題は成り立つ.

(i)(ii) より. 数学的帰納法により命題は2以上の自然数で成り立つことが示された.

よって $c < nb$ が成り立つことが示された.

2020 大阪大

3



tが十分に大きいとき，

$x+y=t$ と $xy=1$ の交点は

$x(t-x)=1$

$x^2-tx+1=0 \qquad x=\dfrac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$

これを α. β とおく (α<βとする) と，

解と係数の関係より $\alpha+\beta=t$, $\alpha\beta=1$ …①

$x+y=t$ と $xy=1$ で囲まれる図形の

面積を $T(t)$ とすると

$$T(t)=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\times\frac{1}{2}\times(\beta-\alpha)$$

$$-\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}\,dx$$

$$=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}-\log\beta+\log\alpha$$

$$S(t)=\frac{1}{2}t^2-T(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{t(\alpha-\beta)}{2}+\log\frac{\beta}{\alpha} \qquad (\because ①)$$

$$S(t)-2\log t=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-4}+\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{t-\sqrt{t^2-4}}-2\log t$$

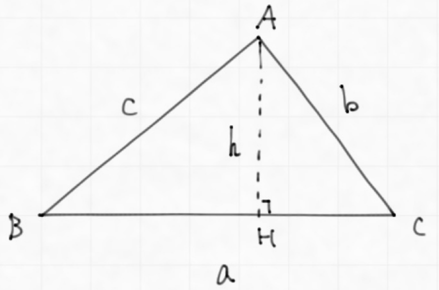
$$=\frac{t(t-\sqrt{t^2-4})(t+\sqrt{t^2-4})}{2\ (t+\sqrt{t^2-4})}+\log\left\{\frac{(t+\sqrt{t^2-4})^2}{t^2-t^2+4}\times\frac{1}{t^2}\right\}$$

$$=\frac{4}{2\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}\right)}+\log\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}\right)^2-\log 4$$

$$\longrightarrow \frac{4}{2\times2}+\log 4-\log 4=\mathbf{1}$$

2020 大阪大

5.



$AB = c$ とする　条件より $a+b+c=2$

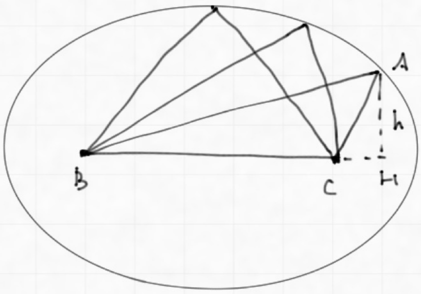
$\angle B < \frac{\pi}{2}$, $\angle C < \frac{\pi}{2}$ のとき.

AからBCに下ろした垂線の足をH. $AH = h$ として

回転体の体積 V は

$$V = \pi h^2 \times BH \times \frac{1}{3} + \pi h^2 \times CH \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\pi h^2 (BH + CH) = \frac{1}{3}\pi h^2 a$$



$\angle B \geqq \frac{\pi}{2}$ のとき

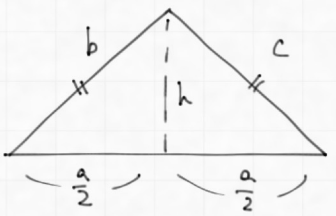
Hを直線BC上にとると

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 BH - \frac{1}{3}\pi h^2 CH = \frac{1}{3}\pi h^2 (BH - CH) = \frac{1}{3}\pi h^2 a$$

$\angle C \geqq \frac{\pi}{2}$ のときも 上と同様で $V = \frac{1}{3}\pi h^2 a$.

以上より　$V = \frac{1}{3}\pi h^2 a$

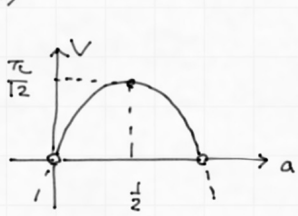
ここで aが一定であるとき $b+c = 2+a$ となり $b+c$も一定.
Aは B, C からの距離の和が一定を保つので. B, Cを焦点とした
だ円上に存在する. したがって hが最大となるのは hが
だ円の短軸半径と一致するときで. このとき $AB=AC$ すなわち
$\triangle ABC$が BCを底辺とする2等辺三角形のとき体積は最大となる.



(2) $b = c$ のとき $h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$　また $a+b+c=2$ より $2b = 2-a$　$b = 1 - \frac{1}{2}a$.

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 a = \frac{1}{3}\pi\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right)a = \frac{1}{3}\pi\left\{\left(1-\frac{1}{2}a\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right\}a = \frac{1}{3}\pi a(1-a)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(-a^2 + a) = -\frac{1}{3}\pi\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\pi$$



$a+b+c=2$,　$a < b+c$ より　$a < 1$

$0 < a < 1$ の範囲におけるVの最大値は $a = \frac{1}{2}$ のときで　$V = \frac{\pi}{12}$