①

(1) Cはx軸と$(-1,0)$で交わるので

$$f(-1)=-1+a-b+c=0 \quad \cdots ①$$

傾きが-1の接線がただ1つ存在するということは$f'(x)=-1$を満たすxが、ただ1つ存在することを意味する。それは、

$$f'(x)=3x^2+2ax+b=-1$$

が重解をもつことを示している。判別式をDとして、

$$D/4=a^2-3(b+1)=0 \quad \cdots ②$$

①,②より $b=\frac{a^2}{3}-1,\quad c=\frac{1}{3}a^2-a$

このとき

$$f(x)=x^3+ax^2+\left(\frac{a^2}{3}-1\right)x+\frac{1}{3}a^2-a$$

$$=(x+1)\left(x^2-(a-1)x+\frac{1}{3}a^2-a\right)$$

$f(x)$は$x=-1$以外にx軸と交わらないので、$x^2-(a-1)x+\frac{1}{3}a^2-a=0$は実数解を持たない。判別式を$D_2$として

$$D_2=(a-1)^2-4\left(\frac{1}{3}a^2-a\right)<0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2-6a-3>0 \quad \cdots ③$$

このとき

$$f'(-1)=3(-1)^2+2a(-1)+\frac{a^2}{3}-1$$

$$=\frac{1}{3}a^2-2a+2=\frac{1}{3}(a^2-6a-3)+1>0+1=1 \quad (\because ③)$$

よって $f'(-1)>0$ がなりたっている

(2) ③より $\underline{a<3-2\sqrt{3},\ a>3+2\sqrt{3}}$

(3) $f'(x)=-1$となるのは $3x^2+2ax+\frac{a^2}{3}=0$ より $x=-\frac{a}{3}$

これが1なので $a=-3$.

このとき $f(x)=x^3-3x^2+2x+6$

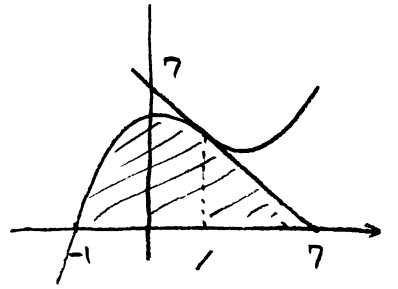
lは $l: y=-1\times(x-1)+f(1)$

$$y=-x+7$$

$f(x) = -x+7$ となるのは

$x^3-3x^2+2x+6+x-7=0$

$(x-1)^3=0$



よってグラフは右のようになり、もとめる図形の面積Sは

$$S = \int_{-1}^{1} x^3-3x^2+2x+6\,dx + \frac{1}{2}\times 6^2$$

$$= 2\int_{0}^{1} -3x^2+6\,dx + 18$$

$$= 2\left[-x^3+6x\right]_0^1 + 18$$

$$= 2(-1+6)+18 = \underline{28}$$

② (1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\theta$

$\Leftrightarrow \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\theta$

$\Leftrightarrow \quad -\cos\left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\theta$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\theta$.

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で上式が成りたつのは

$$\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3\pi}{4} = \pm\theta + 2n\pi$$

$0 \leqq a \leqq \pi$ より　$\frac{3\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3\pi}{4} \leqq \frac{\pi^3}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(\pi^2+3) \fallingdotseq \frac{\pi}{4}(3.14^2+3) = \frac{\pi}{4} \times 13.3\cdots$

(i) $\frac{3}{4}\pi \leqq \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3\pi}{4} \leqq \pi$ のとき　($0 \leqq a \leqq 1$ のとき)

$\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi = \theta$　　　$\theta = \frac{\pi}{4}(a^2 - 3)$

(ii) $\pi < \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3\pi}{4} \leqq 2\pi$ のとき　($1 < a \leqq \sqrt{5}$ のとき)

$\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi = 2\pi - \theta$　　　$\theta = \frac{\pi}{4}(5 - a^2)$

(iii) $2\pi < \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi \leqq 3\pi$ のとき　($\sqrt{5} < a \leqq 3$ のとき)

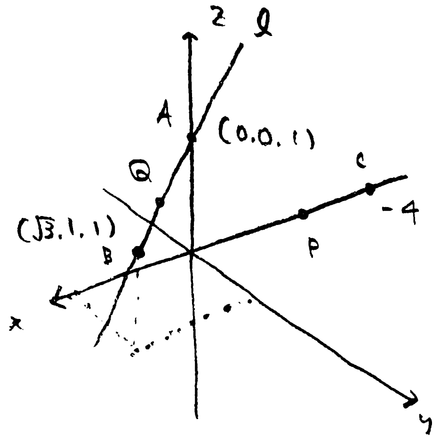
$\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi = \theta + 2\pi$　　　$\theta = \frac{\pi}{4}(a^2 - 5)$

(iv) $3\pi \leqq \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi \leqq \frac{\pi^3}{4} + \frac{3\pi}{4}$ のとき　($3 < a \leqq \pi$ のとき)

$\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi = 4\pi - \theta$　　　$\theta = \frac{\pi}{4}(13 - a^2)$

(2)

③ $(0,0,1)$ を A, $(\sqrt{3},1,1)$ を B, $(-4,0,0)$ を C
と表す



(1) $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{3}, 1, 0)$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = 2.$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4+t\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\underline{P(-4+t, 0, 0),\quad Q(\sqrt{3}t, t, 1)}$$

(2) $|\overrightarrow{OP}| = |t-4|$, $|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{4t^2+1}$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = \sqrt{3}t(t-4)$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(t-4)^2\times(4t^2+1) - 3t^2(t-4)^2}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}|t-4|\sqrt{t^2+1}}$$

(3) $f(t) = S^2 = \frac{1}{4}(t-4)^2(t^2+1)$ とする.

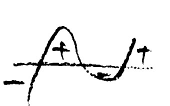
$$f'(t) = \frac{1}{4}\times 2(t-4)(t^2+1) + \frac{1}{4}(t-4)^2\times 2t$$

$$= \frac{1}{2}(t-4)(2t^2-4t+1)$$

$f'(t) = 0$ となるのは $t = 4,\ 1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ より $\quad 0.705 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 0.71$

$0.29 < 1-\frac{\sqrt{2}}{2} < 0.295$, $\quad 1.705 < 1+\frac{\sqrt{2}}{2} < 1.71$



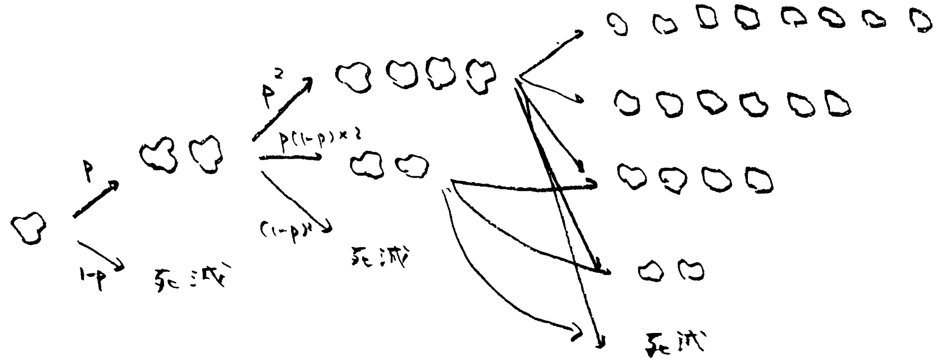
よって $f(t)$ の増減は

t	-0.33	$\cdots$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	2.6
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$		↘		↗		↘	

$f(-0.33) =$

$f(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) =$

④



(1) $P_2 = p\times\left(p^2+2p(1-p)\right) = -p^3+2p^2$

$$P_3 = p\times p^2\times\left(1-(1-p)^4\right) + p\times 2p(1-p)\left(1-(1-p)^2\right)$$

$$= p^3 - p^3(1-p)^4 + 2p^2(1-p) - 2p^2(1-p)^3$$

$$= p^2\left\{p-(1-p)^4 p + 2-2p-2(1-p)^3\right\}$$

$$= p^2\left(\cancel{p}-\cancel{p}+4p^2-6p^3+4p^4-p^5+\cancel{2}-2p-\cancel{2}+6p-6p^2+2p^3\right)$$

$$= p^2\left(-p^5+4p^4-4p^3-2p^2+4p\right)$$

$$= p^3\left(-p^4+4p^3-4p^2-2p+4\right)$$

(2) 最初の1時間で死滅しないのは p.

その後のn時間で1つの細胞が死滅するのは $1-p_n$

2つとも死滅するのは $(1-p_n)^2$

$$\therefore\ p_{n+1} = p\left\{1-(1-p_n)^2\right\}$$

$$p_{n+1} = \underline{p\,p_n(2-p_n)}$$

(3) $p=\frac{1}{3}$ のとき

$$p_{n+1} = +\frac{1}{3}p_n(2-p_n)$$

$0<p_n<1$ だから $\quad 1<2-p_n<2$

よって $\quad 0<p_{n+1} = \frac{2-p_n}{3}p_n < \frac{2}{3}p_n < \left(\frac{2}{3}\right)^2 p_{n-1} < \cdots < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}p_1$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}p_1 = 0$ より、はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$