①

(1) $n=1$, $a_1=1$ のとき

$1\sim4$ までの自然数を並べ変えて, a_1, a_2, b_1, b_2

$|a_1-a_2|$, $|a_1-b_1|$, $|a_1-c_1|$ は全て異なり

$$|a_1-b_1|>|a_1-c_1|>|a_1-a_2| \quad \cdots \quad (*1)$$

となればよい

$a_1=1$ だから. $a_1<b_1$, $a_1<c_1$, $a_1<b_2$

$(*1)$ は $b_1-1>c_1-1>a_2-1$

$$b_1>c_1>a_2$$

b_1, c_1, a_2 は 2, 3, 4 のいずれかなので $\underline{b_1=4,\ c_1=3,\ a_2=2}$ //

このとき (C1) も成り立っている.

(2) $n=2$, $a_1=7$ のとき.

(C2) より $7-b_1>7-c_1>7-a_2$

$$|a_2-b_2|>|a_2-c_2|>|a_2-a_3| \quad \cdots \quad ①$$

ここで (C1) より $7-b_1$, $7-c_1$, $7-a_2$, $|a_2-b_2|$, $|a_2-c_2|$, $|a_2-a_3|$ は

全て異なる整数となるが, $1\sim7$ の整数から 2つを選んだとき, その差の絶対値は

$1\sim6$ の 6通りしかないので, それぞれが $1\sim6$ のいずれかと対応する.

このとき, 6 になりえるのは $7-b_1$ のみなので, $b_1=1$.

5 になるのは $6-1$, $7-2$ のいずれかで, $b_1=1$ なのだから $c_1=2$ しか

ありえない. 同様に差が 4 となるのは $a_2=3$ しかない.

このとき ① は

$$b_2-3>c_2-3>a_3-3$$

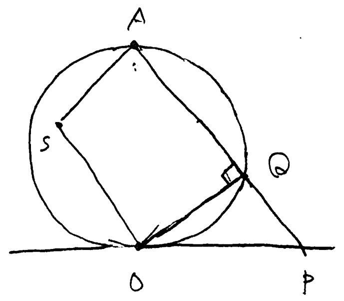
となり $b_2=6$, $c_2=5$, $a_3=4$

$(a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2)=\underline{(3, 4, 1, 6, 2, 5)}$ //

2

(1) 中心は $(0, 0, \frac{1}{2})$, 半径 $\frac{1}{2}$ の球なので $x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^2$

(2) OAPを含む平面と σ との交点は半径 $\frac{1}{2}$ の円であり, OAは円の直径, Qは円周上の点なので $\angle AQO = 90°$



よって

$$\vec{OQ} \cdot \vec{AP} = |\vec{OQ}||\vec{OP}|\cos 90° = 0.$$

すなわち, $\vec{OQ} \perp \vec{AP}$ である.

(3) $\vec{OS} \cdot \vec{AS} = -|\vec{OS}|^2$ より $\vec{OS} \cdot (\vec{OS} - \vec{OA}) = -|\vec{OS}|^2 \Leftrightarrow |\vec{OS}|^2 = \frac{1}{2}\vec{OA} \cdot \vec{OS}$

$\vec{OS} \perp \vec{SQ}$ より $\vec{OS} \cdot \vec{SQ} = \vec{OS} \cdot (\vec{OQ} - \vec{OS}) = -\frac{1}{2}\vec{OA} \cdot \vec{OS} + \vec{OS} \cdot \vec{OQ} = 0$

$$\vec{OS} \cdot \vec{OQ} = \frac{1}{2}\vec{OA} \cdot \vec{OS} = \frac{1}{2}r$$

③

(1) $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ と表す。与式は

$$\int_0^x f(t)dt = 4ax^3 + (1-3a)x + \int_0^x F(u) - F(0)\,du - \int_1^x F(1) - F(u)\,du$$

… (*)

両辺を x で微分する

$$f(x) = 12ax^2 + 1-3a + F(x) - F(0) - F(1) + F(x) \quad \cdots (**)$$

$x=0$ として

$$f(0) = 1-3a + F(0) - F(1) \quad \cdots ①$$

$x=1$ として

$$f(1) = 12a + 1-3a + F(1) - F(0) \quad \cdots ②$$

①+② より

$$f(0) + f(1) = 6a+2 \quad \cdots ③$$

(*) で $x=0$ とすると

$$0 = 0+0+0 - \int_1^0 F(1) - F(u)\,du$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 F(1)\,du = \int_0^1 F(u)\,du \quad \cdots ④$$

(*) で $x=1$ とすると

$$\int_0^1 f(t)dt = 4a+1-3a + \int_0^1 F(u) - F(0)\,du - 0$$

$$F(1) - F(0) = a+1 + \int_0^1 F(u)\,du - \int_0^1 F(0)\,du$$

④を代入。

$$F(1) - F(0) = a+1 + \int_0^1 F(1)\,du - \int_0^1 F(0)\,du$$

$$\Leftrightarrow F(1) - F(0) = a+1 + F(1) - F(0)$$

$$\Leftrightarrow \underline{a = -1}$$

これを③に代入 $f(0) + f(1) = \underline{-4}$

(2) (**) を $g(x)$ の式に代入

$$g(x) = e^{-2x}\left(12ax^2 + 1 - 3a + 2F(x) - F(0) - F(1)\right)$$

xで微分する

$$g'(x) = -2e^{-2x}\left(12ax^2+1-3a+2F(x)-F(0)-F(1)\right)$$
$$+e^{-2x}\left(24ax+2f(x)\right)$$
$$= e^{-2x}\left(24ax+\cancel{24ax^2}\cancel{+2}\cancel{-6a}\cancel{+4F(x)}\cancel{-2F(0)}\cancel{-2F(1)}\right.$$
$$\left.\cancel{-24ax^2}\cancel{-2}\cancel{+6a}\cancel{-4F(x)}\cancel{+2F(0)}\cancel{+2F(1)}\right)$$
$$= 24axe^{-2x}$$
$$= \underline{-24xe^{-2x}}_{\,//}$$

(3)

$$\int g'(x)\,dx = -24\int xe^{-2x}dx = -24\left\{-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx\right\}$$
$$= 12xe^{-2x}+6e^{-2x}+C \quad = g(x)$$

$$f(x) = e^{2x}g(x) = 12x+6+Ce^{2x}$$

$$f(0)+f(1) = 6+C+18+Ce^2 = -4 \text{ より}$$

$$C = -\frac{28}{1+e^2}$$

よって $f(x) = \underline{12x+6-\dfrac{28e^{2x}}{1+e^2}}_{\,//}$