①

(1) $4n+1$ 枚から3枚をとり出して並べることを考える　${}_{4n+1}P_3$

このうち、積が0となるのは、0が選ばれたときだから

$$\frac{{}_{4n}C_2\times{}_1C_1\times 3!}{{}_{4n+1}P_3} = \frac{\cancel{4n}\times(\cancel{4n-1})\times 3\times\cancel{2}}{(4n+1)(\cancel{4n})(\cancel{4n-1})\cancel{2}} = \frac{3}{4n+1}$$

(2) 0がでるときは(1)の確率。

これ以外に　(i) I_1 または I_2 から3枚、

(ii) I_1 または I_2 から1枚と、I_3 または I_4 から2枚

の2つのケースが考えられる

(i) $\dfrac{{}_{2n}P_3}{{}_{4n+1}P_3}$　(ii) $\dfrac{{}_{2n}C_1\times{}_{2n}C_2\times 3!}{{}_{4n+1}P_3}$

まとめると、
$$\frac{{}_{4n}C_2\times 3! + {}_{2n}P_3 + {}_{2n}C_1\times{}_{2n}C_2\times 3!}{{}_{4n+1}P_3}$$

$$= \frac{\cancel{(4n)}(4n-1)\times\overset{3}{\cancel{6}}\times\overset{1}{\cancel{\tfrac{1}{2}}} + \cancel{2n}\times(2n-1)\overset{n-1}{\cancel{(2n-2)}} + \cancel{2n}\times\cancel{2}n(2n-1)\times 3}{(4n+1)\cancel{4n}(4n-1)}$$

$$= \frac{12n-3+2n^2-3n+1+6n^2-3n}{(4n+1)(4n-1)} = \frac{8n^2+6n-2}{(4n+1)(4n-1)} = \frac{2(n+1)}{4n+1}$$

(3) $4n+1$ 枚から2枚を順に選ぶ　${}_{4n+1}P_2$

和が実数となるのは (i) $I_1\cup I_2\cup\{0\}$ から2枚を選ぶ
(ii) I_3 と I_4 から共役な複素数の1ペアを選ぶものというから、

$$\frac{{}_{2n+1}P_2 + n\times 2}{{}_{4n+1}P_2} = \frac{(2n+1)\times\cancel{2n}+\overset{1}{\cancel{2n}}}{(4n+1)\times\cancel{4n}\,2} = \frac{2(n+1)}{2(4n+1)} = \frac{n+1}{4n+1}$$

(3) $X_1=0$ または $X_2+X_3=0$ $(X_1\neq 0)$

$$\frac{1\times{}_{4n}P_2 + 2n\times 2!\times(4n-2)}{{}_{4n+1}P_3} = \frac{\cancel{4n}\times(4n-1)+\cancel{4n}\times(4n-2)}{(4n+1)\cancel{4n}(4n-1)} = \frac{8n-3}{(4n+1)(4n-}$$

(5) $x_1(x_2+x_3)=0$ となるのは (4) より $\dfrac{8n-3}{(4n+1)(4n-1)}$

$x_1(x_2+x_3)\neq 0$ のときは

(i) x_1 が実数 かつ x_2+x_3 が実数 (いずれも 0 は除く)

(ii) x_1 が I_3 または I_4 の要素で、かつ x_2+x_3 が純虚数 (いずれも 0を除く)

(i) は $2n\times({}_{2n+1}P_2-2n)$.

(ii) は x_2+x_3 が純虚数なのは $2n\times(2n-2)$

このとき x_1 が純虚数なのは $2n-2$.

まとめると

$$\frac{8n-3}{(4n+1)(4n-1)}+\frac{2n\left((2n+1)2n-2n\right)+2n(2n-2)(2n-2)}{{}_{4n+1}P_3}$$

$$=\frac{8n-3}{(4n+1)(4n-1)}+\frac{\cancel{2n}\times\cancel{2n}(2n\quad)+\cancel{2n}\overset{n-1}{\cancel{(2n-2)}}(2n-2)}{(4n+1)\underset{7}{\cancel{4n}}(4n-1)}$$

$$=\frac{8n-3+2n^2+2n^2-4n+2}{(4n+1)(4n-1)}=\frac{4n^2+4n-1}{(4n+1)(4n-1)}$$

③ (1)

$a_1 = a.$ $\quad a_2 = a_1 + 1 = \underline{a+1}$

$a_3 = 2a_2 = \underline{2a+2}$

$a_4 = a_3 + 1 = \underline{2a+3}$

$b_1 = a$ $\quad b_2 = 2b_1 = \underline{2a}$

$b_3 = b_2 + 1 = \underline{2a+1}$

$b_4 = 2b_3 = \underline{4a+2}$

(2) $a_{2k+1} = 2a_{2k}$, $a_{2k+2} = a_{2k+1} + 1$ より

$a_{2k+2} = 2a_{2k} + 1$ よって

$c_{n+1} = 2c_n + 1$

$c_{n+1} + 1 = 2(c_n + 1)$

$\{c_n + 1\}$ は 初項 $c_1 + 1 = a_2 + 1 = a + 2$, 公比 2 の 等比数列

$c_n + 1 = 2^{n-1}(a+2)$

$c_n = \underline{(a+2)2^{n-1} - 1}$

(3)
$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} + a_{2k})$$

$$= \sum_{k=2}^{n} (2a_{2k-2} + a_{2k}) + a_1 + a_2$$

$$= \sum_{k=2}^{n} (2c_{k-1} + c_k) + 2a + 1$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left\{(a+2)\times 2^{k-1} - 2 + (a+2)\times 2^{k-1} - 1\right\} + 2a + 1$$

$$= (a+2)\sum_{k=2}^{n} 2^{k} - 3(n-1) + 2a + 1$$

$$= (a+2)\left\{\frac{4\times(2^{n-1}-1)}{2-1}\right\} - 3n + 3 + 2a + 1$$

$$= (a+2)2^{n+1} - 4a - 8 - 3n + 3 + 2a + 1$$

$$= \underline{(a+2)2^{n+1} - 3n - 2a - 4}$$

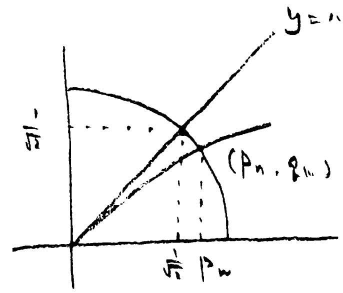
④ (1) $f(x) = x - n\sin\frac{x}{n}$ とおく.

$f'(x) = 1 - n \times \frac{1}{n}\cos\frac{x}{n} = 1-\cos\frac{x}{n} \geq 0$. ∴ $f(x)$ は単調増加

また $f(0) = 0 - n\times 0 = 0$ なので. $f(x) \geq f(0) = 0$.

∴ $x > 0$ のとき $n\sin\frac{x}{n} < x$ が成り立つ

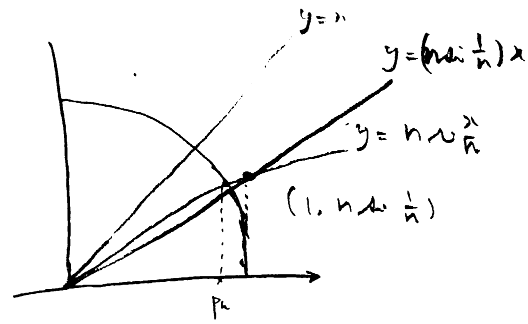
(2) $0 < x \leq 1$ において $y = n\sin\frac{x}{n}$ は単調に増加し, また, (1)より, $y = x$ よりも下側にある. したがって, $x^2+y^2=1$ との交点は第1象限の $y=x$ の下側となり



$$\frac{1}{\sqrt{2}} < p_n$$

が成り立つことが分かる.

(3)
(i) $y = (n\sin\frac{1}{n})x$ と $x^2+y^2=1$ の交点の x 座標は..



$$x^2 + (n\sin\tfrac{1}{n})^2 x^2 = 1$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+(n\sin\frac{1}{n})^2}}$$

☆より. $y = (n\sin\frac{1}{n})x$ は $y = n\sin\frac{x}{n}$ の下側にあるので

$$p_n \leq \frac{1}{\sqrt{1+(n\sin\frac{1}{n})^2}}$$

(ii) $S_n = \int_0^{p_n} n\sin\frac{x}{n}\,dx = n\left[n\cos\frac{x}{n}\right]_0^{p_n} = \underline{-n^2\cos\frac{p_n}{n} + n^2}$

$$S_n = n^2\left(1-\cos\frac{p_n}{n}\right)$$

$$= n^2\left(1-1+2\sin^2\frac{p_n}{2n}\right) = 2n^2\sin^2\frac{p_n}{2n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{p_n}{2n}}{\frac{p_n}{2n}}\right)^2 p_n^2$$

ここで

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 < p_n^2 \leq \frac{1}{1+\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2}.$$

なので

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sin\frac{p_n}{2n}}{\frac{p_n}{2n}}\right)^2 < S_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{p_n}{2n}}{\frac{p_n}{2n}}\right)^2\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{\sin\frac{p_n}{2n}}{\frac{p_n}{2n}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{p_n}{2n}}{\frac{p_n}{2n}}\right)^2\left(\frac{1}{1+\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2}\right) = \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{1+1} = \frac{1}{4}.$$

よってはさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$$

(c)

$g(x) = n\sin\frac{x}{n} - \left(n\sin\frac{1}{n}\right)x$ とおく.

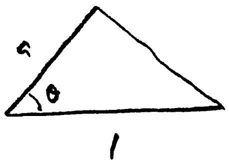
$g'(x) = \cos\frac{x}{n} - n\sin\frac{1}{n}$

$g''(x) = -\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$

$0 < x < 1$ のとき $0 < \sin\frac{x}{n} < \sin\frac{1}{n}$ なので $g''(x)$ は常に負.

$g'(0) = 1$, $g'(1) = \cos\frac{1}{n} - n\sin\frac{1}{n}$ ...

⑤ (1)



1とaの長さの辺のなす角をθとすると

面積Sは

$$S = \frac{1}{2} a \sin\theta$$

これが最大となるのは $\theta = 90^\circ$ のとき。

このとき、残りの1辺は、

$$\underline{\sqrt{1+a^2}}$$

(2)