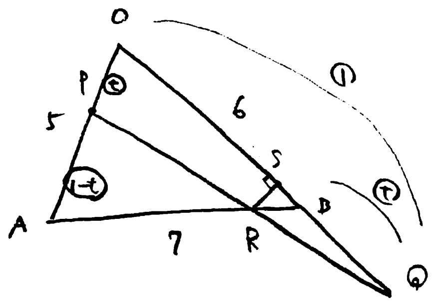
①



$|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$

$|\vec{AB}|=7$

(1) $|\vec{AB}|=7$ より. $|\vec{b}-\vec{a}|^2=7^2 \Leftrightarrow 61-2\vec{a}\cdot\vec{b}=49 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=6$

(2) $\vec{OP}=t\vec{a}$, $\vec{OQ}=\dfrac{1}{1-t}\vec{b}$

RはPQ上にあるので $\vec{OR}=s\vec{OQ}+(1-s)\vec{OP}=\dfrac{s}{1-t}\vec{b}+t(1-s)\vec{a}$

これがAB上にあるとき、$\vec{a}$と$\vec{b}$の係数の和は1.

$$\frac{s}{1-t}+t(1-s)=1$$

$$s=\frac{1-2t+t^2}{1-t+t^2}$$

$$\therefore\ \vec{OR}=\frac{1-t}{1-t+t^2}\vec{b}+\frac{t^2}{1-t+t^2}\vec{a}$$

(3) SはOB上にあるので $\vec{OS}=k\vec{b}$

RS⊥OBより $(\vec{OS}-\vec{OR})\cdot\vec{b}=0$

$$k|\vec{b}|^2-\left(\frac{1-t}{1-t+t^2}\vec{b}+\frac{t^2}{1-t+t^2}\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=0$$

$$36k-36\frac{1-t}{1-t+t^2}-6\frac{t^2}{1-t+t^2}=0$$

$$k=\frac{6-6t+t^2}{6(1-t+t^2)}\qquad\therefore\ \vec{OS}=\frac{6-6t+t^2}{6(1-t+t^2)}\vec{b}$$

(4) $$|\vec{OS}|=\left|\frac{6-6t+t^2}{6(1-t+t^2)}\right|\times 6=\left|\frac{t^2-6t+6}{t^2-t+1}\right|=4$$

$$t^2-6t+6=\pm4(t^2-t+1)$$

$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3},\ 1\pm\sqrt{3}$ このうち $0<t<1$ を満たすものは $t=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

②

(1) カードを全て区別する。

1回で終了するのは、1枚目に10のカードを取り出したときなので

$$\frac{10}{30} = \underline{\frac{1}{3}}_{//}$$

(2) 2回目で終了するのは、

$3 \to 10$, $5 \to 5$, $5 \to 10$

の順にとり出されたときなので

$$\frac{10 \times 10 + {}_{10}P_2 + 10 \times 10}{{}_{30}P_2} = \frac{10\cancel{0} + 9\cancel{0} + 10\cancel{0}}{3\cancel{0} \times 29} = \frac{29}{87} = \underline{\frac{1}{3}}_{//}$$

(3) カードの合計が12以上となるのは

$3 \to 3 \to 3 \to 3$, $3 \to 3 \to 3 \to 5$, $3 \to 3 \to 3 \to 10$

$3 \to 3 \to 10$, $3 \to 5 \to 5$, $3 \to 5 \to 10$, $3 \to 10$

$5 \to 3 \to 5$, $5 \to 3 \to 10$, $5 \to 10$

$3 \to 3 \to 3 \to \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{10}{30} \times \frac{9}{29} \times \frac{8}{28} \times \frac{27}{27}$

$3 \to 3 \to 10$ $\quad \frac{10}{30} \times \frac{9}{29} \times \frac{10}{28}$

$3 \to 5 \to \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{10}{30} \times \frac{10}{29} \times \frac{19}{28}$

$3 \to 10$ $\quad \frac{10}{30} \times \frac{10}{29}$

$5 \to 3 \to \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{10}{30} \times \frac{10}{29} \times \frac{19}{28}$

$5 \to 10$ $\quad \frac{10}{30} \times \frac{10}{29}$

合計すると $\quad \frac{1}{3\cancel{0}} \times \frac{1}{29} \times \frac{1}{28} \left(\cancel{10} \cdot 9 \cdot 8 + \cancel{10} \cdot 9 \cdot 10 + \cancel{10} \cdot 10 \cdot 19 + \cancel{10} \cdot 10 \cdot 28 + \cancel{10} \cdot 10 \cdot 19 + \cancel{10} \cdot 10 \cdot 28 \right)$

$$= \frac{1}{3 \cdot 29 \cdot 28} (72 + 90 + 190 + 280 + 190 + 280) = \frac{19}{42}$$

③

(1) $f'(x) = a - \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{a+(a-1)e^x}{1+e^x}$

$f'(x) = 0$ となるのは　$e^x = \dfrac{a}{1-a}$　$\Leftrightarrow$　$x = \log a - \log(1-a)$

$f(x)$ の増減は下のようになる

x	$\cdots$	$\log a - \log(1-a)$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$$f(\log a - \log(1-a)) = a\log a - a\log(1-a) - \log\left(1+\frac{a}{1-a}\right)$$

$$= a\log a - a\log(1-a) + \log(1-a)$$

$\therefore$　$M(a) = a\log a + (1-a)\log(1-a)$

(2)　$M'(a) = \log a + a\cdot\dfrac{1}{a} + (-1)\log(1-a) - (1-a)\times\dfrac{1}{1-a}$

$= \log a - \log(1-a)$

$M'(a) = 0$ となるのは　$\log\dfrac{a}{1-a} = 0$　$\Leftrightarrow$　$\dfrac{a}{1-a} = 1$　$\Leftrightarrow$　$a = \dfrac{1}{2}$

$M(a)$ の増減は下のようになる

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$M'(a)$		$-$	0	$+$	
$M(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$M\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = -\log 2$.

$\therefore$ $y = M(a)$ の最小値は $-\log 2$.　そのときの a は $\dfrac{1}{2}$

(3)

$$\lim_{a \to +0} M(a) = \lim_{a \to +0} \{ a\log a + (1-a)\log(1-a) \}$$

$$= 0 + 1 \times \log 1 \qquad (\because \lim_{x \to +0} x \log x = 0)$$

$$= 0$$

$$\lim_{a \to 1-0} M(a) = \lim_{a \to 1-0} \{ a\log a + (1-a)\log(1-a) \}$$

$1-a = b$とすると $b \to +0$

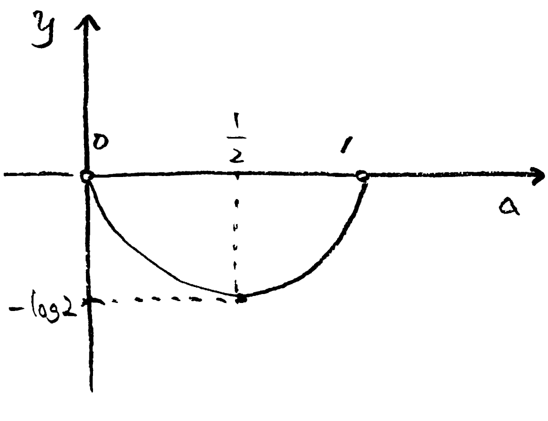
$$\lim_{a \to 1-0} M(a) = \lim_{b \to +0} \{ (1-b)\log(1-b) + b\log b \}$$

$$= 1\log 1 + 0 = 0.$$

$$M''(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a} > 0 \quad (\because 0 < a < 1)$$

$M(a)$の増減および凹凸は右のようになり、グラフは下のようになる

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$M'(a)$		$-$	0	$+$	
$M''(a)$		$+$	$+$	$+$	
$M(a)$		↳		↗	



④

(1)

n^n 、$n!$ はともに正なので $\frac{n!}{n^n} > 0$.

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{n^{n-1}\cdot 1}{n^n} = \frac{1}{n}$$

よって $0 < a_n < \frac{1}{n}$ となるが、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ なので、

はさみうちの原理により、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}\times\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}\times\frac{n}{n+1}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left[\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{\frac{n+1}{n}}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right]$$

$$= e^1\times 1 = \underline{e}$$

(3)

$$\log\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \log\left\{\frac{(kn)!}{(kn)^{kn}}\times\frac{n^n}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\log\left\{\frac{(kn)(kn-1)\cdots(n+1)}{(kn)^{kn-n}}\times\frac{n^n}{(kn)^n}\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\log\frac{(kn)\cdots(n+1)}{(kn)^{kn-n}} + \log\frac{1}{k^n}\right\}$$

$$= \frac{k}{kn}\sum_{l=n+1}^{kn}\log\frac{l}{kn} - \log k$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{kn}\sum_{l=n+1}^{kn}\log\frac{l}{kn} = \int_{\frac{1}{k}}^{1}\log x\,dx = \left[x\log x - x\right]_{\frac{1}{k}}^{1} = -1 + \frac{1}{k}\log k + \frac{1}{k}$$

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = k\left(-1+\frac{1}{k}\log k+\frac{1}{k}\right) - \log k = -k+1 = \log e^{1-k}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{1-k}$$