①(1) $n=1$とすると $S_1 = 6\times1-2a_1$ つまり $a_1=6-2a_1$ $\therefore \underline{a_1=2}$

$$
\begin{array}{lll}
S_{n+1} = 6(n+1)-2a_{n+1} & & (n\geqq 0) \\
-)\ S_n = 6n-2a_n & & (n\geqq 1) \\
\hline
a_{n+1} = 6-2a_{n+1}+2a_n & & (n\geqq 1)
\end{array}
$$

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n+2 \quad (n\geqq 1).$$

$$a_{n+1}-6 = \frac{2}{3}(a_n-6) \quad (n\geqq 1)$$

$\{a_n-6\}$は初項 $a_1-6=-4$, 公比 $\frac{2}{3}$の等比数列.

$$a_n-6 = -4\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_n = \underline{6-4\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

(2) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$

$$= \left(-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$$

$$= 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= \underline{4A^2}$$

(3) $\log_2 x^2 = \log_2 2^2+\log_2|x-2|$

$$x^2 = 4|x-2|$$

$x\geqq 2$のとき, $x^2=4x-8$. $\Leftrightarrow x^2-4x+8=0$.

この式の判別式をDとすると $D/4=4-8=-4<0$だから, これは解をもたない

$x<2$のとき, $x^2=-4x+8 \Leftrightarrow x^2+4x-8=0$

$x=-2\pm\sqrt{4+8}=-2\pm2\sqrt{3}$. これらはいずれも$x<2$を満たす.

以上より $x=\underline{-2\pm2\sqrt{3}}$

(4) $$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{x^2+x-0}{x}=\lim_{x\to-0}(x+1)=1$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{x-0}{x}=1$$

$$\therefore f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=1.$$

②

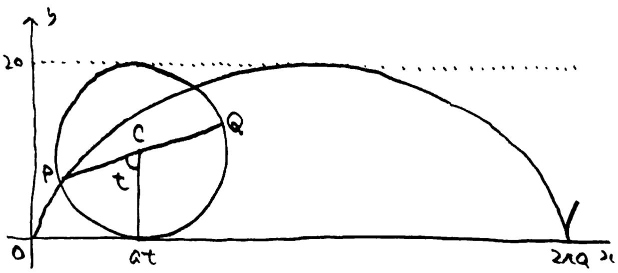
(1) $C(at, a)$

$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = (-a\sin t, -a\cos t)$

$\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP} = (a\sin t, a\cos t)$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ}$ だから

$Q\left(a(t+\sin t), a(1+\cos t)\right)$



(2) $\dfrac{dx}{dt} = a - a\cos t$, $\dfrac{dy}{dt} = a\sin t$ $\quad \therefore \ \overrightarrow{v_P} = \left(a(1-\cos t), a\sin t\right)$

$|\overrightarrow{v_P}|^2 = a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t = a^2 - 2a^2\cos t + a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = 2a^2(1-\cos t)$

$0 \leqq t \leqq 2\pi$ のとき $\quad 0 \leqq 1-\cos t \leqq 2$

$|\overrightarrow{v_P}|$は $t = 0, 2\pi$のとき最小値 0 をとり Pは$(0, 0), (2\pi a, 0)$

$t = \pi$ のとき最大値 $2a$ をとる このとき Pは $(a\pi, 2a)$

(3) $\dfrac{d}{dt}\left(at + a\sin t\right) = a(1+\cos t)$, $\dfrac{d}{dt}\left(a + a\cos t\right) = -a\sin t$

$\therefore \ \overrightarrow{v_Q} = \left(a(1+\cos t), -a\sin t\right)$

$\overrightarrow{v_P} \cdot \overrightarrow{v_Q} = \left(a(1-\cos t), a\sin t\right) \cdot \left(a(1+\cos t), -a\sin t\right)$

$= a^2(1-\cos^2 t) - a^2\sin^2 t = a^2 - a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = 0$

(4) $L_P = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} |\overrightarrow{v_P}|\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt = \sqrt{2}a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$

$= 2a\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = -4a\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}a$

$L_Q = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} |\overrightarrow{v_Q}|\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{2a^2(1+\cos t)}\,dt = \sqrt{2}a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}\,dt$

$= 2a\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left|\cos\frac{t}{2}\right|dt = 2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{t}{2}\,dt + 2a\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} -\cos\frac{t}{2}\,dt$

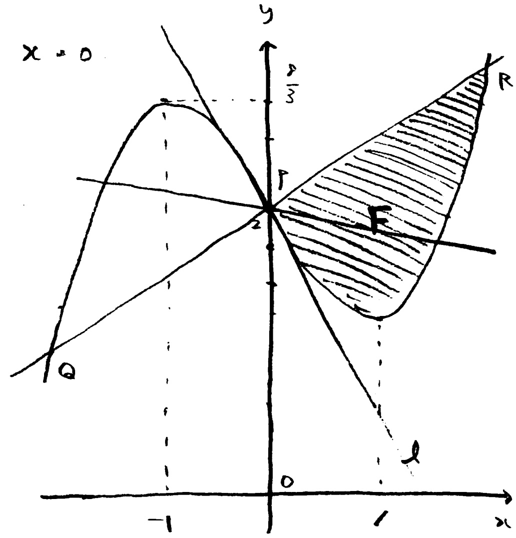
$= 2a\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + 2a\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi} = 4a \times 2 - 2\sqrt{2}a - 2\sqrt{2}a = 4(2-\sqrt{2})a$

③ (1) $f'(x) = x^2 - 1$ 　　$f'(x)=0$ となるのは $x = \pm 1$

$f''(x) = 2x$ 　　$f''(x) = 0$ 〃 $x = 0$

$f(x)$の増減および凹凸は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{8}{3}$	↘	2	↘	$\frac{4}{3}$	↗



(2) $f'(0) = 0 - 1 = -1$

l : $\underline{y = -x + 2}$

m : $\underline{y = x + 2}$

(3) mとCの交点は

$\frac{1}{3}x^3 - x + 2 = x + 2.$

$x^3 - 6x = 0$

$x = 0, \sqrt{6}, -\sqrt{6}.$ 　Rのx座標はQより大きいので　$R(\sqrt{6}, \sqrt{6}+2)$, $Q(-\sqrt{6}, -\sqrt{6}+2)$

$$S = \int_0^{\sqrt{6}} x + 2 - \left(\frac{1}{3}x^3 - x + 2\right) dx = \int_0^{\sqrt{6}} 2x - \frac{1}{3}x^3 dx = \left[x^2 - \frac{1}{12}x^4\right]_0^{\sqrt{6}} = 6 - \frac{1}{12} \times 6^2 = \underline{3}$$

(4) もとめる直線はPを通って $0 < x < \sqrt{6}$ の範囲でCと交わるので

$y = mx + 2$ 　　$(-1 < m < 1)$

と表すことができる。これとCの交点は

$\frac{1}{3}x^3 - x + 2 = mx + 2.$

$x^3 = 3(m+1)x.$ 　　$x = 0, \pm\sqrt{3(m+1)}$

このうち第1象限にあるのは $\sqrt{3(m+1)}$ 　この交点をAとすると $A(\sqrt{3(m+1)},\ m\sqrt{3(m+1)}+2)$

FのうちPAの下側部分の面積が $\frac{S}{2}\left(= \frac{3}{2}\right)$ となればよいので

$$\frac{3}{2} = \int_0^{\sqrt{3(m+1)}} mx + 2 - \frac{1}{3}x^3 + x - 2\, dx = \left[\frac{m+1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4\right]_0^{\sqrt{3(m+1)}} = \frac{1}{2}(m+1)(3m+3) - \frac{1}{12} \times 9(m+1)^2$$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(m+1)^2 - \frac{3}{4}(m+1)^2 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 2 \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{2}$

$-1 < m < 1$ だから $m = -1 + \sqrt{2}$ 　　よって、もとめる直線は $\underline{y = (\sqrt{2} - 1)x + 2}$

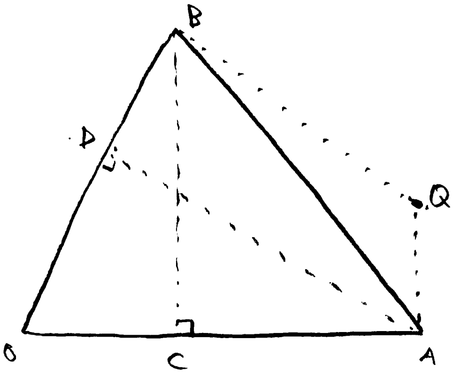
④ (1) $\vec{OC} = |\vec{OC}| \times \dfrac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|}$

$= |\vec{OB}|\cos\angle O \times \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$= |\vec{b}|\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \times \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$= \left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a} = \dfrac{ab\cos\theta}{a^2}\vec{a}$

$= \left(\dfrac{b}{a}\cos\theta\right)\vec{a}$



同様に $\vec{OD} = \left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b} = \left(\dfrac{a}{b}\cos\theta\right)\vec{b}$

(2) $\vec{OA} + \vec{AQ} = \vec{a} + \ell\vec{CB} = \vec{a} + \ell(\vec{b} - \vec{OC}) = \left(1 - \dfrac{b}{a}\ell\cos\theta\right)\vec{a} + \ell\vec{b}$

$\vec{OB} + \vec{BQ} = \vec{b} + m\vec{DA} = \vec{b} + m(\vec{a} - \vec{OD}) = m\vec{a} + \left(1 - \dfrac{a}{b}m\cos\theta\right)\vec{b}$

$\vec{a}, \vec{b}$は互いに一次独立だから、上の2式の係数を比較して

$$1 - \frac{b}{a}\ell\cos\theta = m, \quad 1 - \frac{a}{b}m\cos\theta = \ell.$$

mを消去すると

$$1 - \frac{a}{b}\cos\theta\left(1 - \frac{b}{a}\ell\cos\theta\right) = \ell$$

$$\ell\sin^2\theta = 1 - \frac{a}{b}\cos\theta$$

$$\ell = \frac{b - a\cos\theta}{b\sin^2\theta}$$

同様に $m = \dfrac{a - b\cos\theta}{a\sin^2\theta}$

(3) $\vec{OQ} = \vec{a} + \ell\vec{CB} = \left(1 - \dfrac{b}{a}\cos\theta \times \dfrac{b - a\cos\theta}{b\sin^2\theta}\right)\vec{a} + \dfrac{b - a\cos\theta}{b\sin^2\theta}\vec{b}$

$= \dfrac{a - b\cos\theta}{a\sin^2\theta}\vec{a} + \dfrac{b - a\cos\theta}{b\sin^2\theta}\vec{b}$

$\therefore\ p = \dfrac{a - b\cos\theta}{a\sin^2\theta}, \quad q = \dfrac{b - a\cos\theta}{b\sin^2\theta}$

$\angle OAQ = 90^\circ$, $\angle OBQ = 90^\circ$ なので $\angle OAQ + \angle OBQ = 180^\circ$

したがって O, A, Q, B は共円で OQ は外接円の直径.

したがって $\vec{OP} = \dfrac{1}{2}\vec{OQ}$ となる.

よって $r = \dfrac{a - b\cos\theta}{2a\sin^2\theta}, \quad s = \dfrac{b - a\cos\theta}{2b\sin^2\theta}$

⑤ (1) 左辺 $= t\left|z+\frac{1}{t}\right| = f(z)$, 右辺 $= \frac{1}{t}|z-t| = g(z)$ と表す.

$$f(t) = t\left|t+\frac{1}{t}\right| = t\left(t+\frac{1}{t}\right) \quad (\because t>0)$$
$$= t^2+1$$
$$g(t) = \frac{1}{t}|t-t| = 0.$$

$t^2+1 \geqq 1$ だから $f(t) \neq g(t)$ すなわち, 点Aは F上の点ではない

$$f\left(-\frac{1}{t}\right) = t\left|-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}\right| = 0.$$
$$g\left(-\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\left|-\frac{1}{t}-t\right| = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+t\right) = \frac{1}{t^2}+1 \neq 0$$

よって $f\left(-\frac{1}{t}\right) \neq g\left(-\frac{1}{t}\right)$ であり, 点Bは F上の点ではない.

(2) $t=1$ を代入すると (a) は,

$$|z+1| = |z-1|$$

となる。これは点 z と点1の距離と, 点 z と点 -1 との距離が等しいことを示している.

すなわち, (a) は点1と点-1の垂直二等分線であり、それは(a)が虚軸であることを示している

(3) 点Aと点Bは, ともに実軸上の点だから, 直線ABは実軸と一致する.

zが実数だとすると,

$$t\left|z+\frac{1}{t}\right| = \frac{1}{t}|z-t|$$
$$\Leftrightarrow \quad t^2\left(z+\frac{1}{t}\right)^2 = \frac{1}{t^2}(z-t)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad t^2z^2+2tz+1 = \frac{1}{t^2}z^2-\frac{2}{t}z+1$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(t+\frac{1}{t}\right)\left\{\left(t-\frac{1}{t}\right)z+2\right\}z = 0$$

$t+\frac{1}{t} \neq 0$ また $t=-1$ は上式を満たさないので $t \neq -1, 1$

したがって上式を満たす z は $z = \frac{2t}{1-t^2}, 0$

$|z_1|<|z_2|$ だから $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{2t}{1-t^2}$

(4) $m = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{t}{1-t^2}$

$z-m=w$ とする $z=w+m$ を (a) に代入

$$t\left|w+\frac{t}{1-t^2}+\frac{1}{t}\right| = \frac{1}{t}\left|w+\frac{t}{1-t^2}-t\right|$$
$$t\left|w+\frac{1}{t(1-t^2)}\right| = \frac{1}{t}\left|w+\frac{t^3}{1-t^2}\right|$$

両辺を2乗する

$$t^2\left(w+\frac{1}{t(1-t^2)}\right)\left(\bar{w}+\frac{1}{t(1-t^2)}\right)=\frac{1}{t^2}\left(w+\frac{t^3}{1-t^2}\right)\left(\bar{w}+\frac{t^3}{1-t^2}\right)$$

$$t^2|w|^2+\frac{t}{1-t^2}\bar{w}+\frac{t}{1-t^2}w+\frac{1}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{t^2}|w|^2+\frac{t}{1-t^2}\bar{w}+\frac{t}{1-t^2}w+\frac{t^4}{(1-t^2)^2}$$

$$\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)|w|^2=\frac{1}{(1-t^2)^2}(t^4-1)$$

$$|w|^2=\frac{1}{(1-t^2)^2}\cancel{(t^2+1)}\cancel{(t^2-1)}\times\frac{t^2}{\cancel{(t^2-1)}\cancel{(t^2+1)}}$$

$$|w|=\left|\frac{t}{1-t^2}\right|=|m|$$

これはFが点M(m)を中心とした半径|m|の円を描くことを示している

⑥ (1) $F_2(x)=\int_0^x \frac{t^2}{2!}e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\frac{t^2}{2!}\right]_0^x+\int_0^x\frac{t^1}{1!}e^{-t}dt=\underline{-\frac{1}{2}x^2e^{-x}+F_1(x)}$

$F_1(x)=\int_0^x\frac{t^1}{1!}e^{-t}dt=\left[-te^{-t}\right]_0^x+\int_0^x e^{-t}dt=\underline{-xe^{-x}+F_0(x)}$

(2) $F_0(x)=\int_0^x e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^x=\underline{-e^{-x}+1}$

$F_1(x)=\underline{-xe^{-x}-e^{-x}+1}$

$F_2(x)=\underline{-\frac{1}{2}x^2e^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}+1}$

(3) $F_n(x)=\int_0^x\frac{t^n}{n!}e^{-t}dt=\left[\frac{t^n}{n!}\times(-e^{-t})\right]_0^x-\int_0^x\frac{1}{n!}\times nt^{n-1}(-e^{-t})dt$

$=-\frac{1}{n!}x^ne^{-x}+\int_0^x\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}dt=\underline{-\frac{1}{n!}x^ne^{-x}+F_{n-1}(x)}$

$F_n(x)=-\frac{1}{n!}x^ne^{-x}+F_{n-1}(x)$

$=-\frac{1}{n!}x^ne^{-x}-\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x}+F_{n-2}(x)$

$=-\frac{1}{n!}x^ne^{-x}-\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x}-\frac{1}{(n-2)!}x^{n-2}e^{-x}+F_{n-3}(x)$

$=\cdots=-\frac{1}{n!}x^ne^{-x}-\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x}-\cdots-\frac{1}{1!}x^1e^{-x}+F_0(x)$

$=-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}x^ke^{-x}\right)-e^{-x}+1$

$=\underline{-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}x^ke^{-x}\right)+1}$

(4) $p^{(1)}(x)=nx^{n-1}$, $p^{(2)}(x)=n(n-1)x^{n-2}$, $p^{(3)}(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$,\cdots$ $p^{(k)}(x)=n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}=\underline{\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}}$

左辺 $=\int_0^x t^ne^{-t}dt=n!\times\int_0^x\frac{t^n}{n!}e^{-t}dt=n!F_n(x)$

$=-n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^ke^{-x}+n!$ $\quad(\because (3))$

$=-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!}x^k\right)+n!=-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\right)+n!$ $\quad$（Σの中でkを$n-k$とおきかえた）

$=-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)+n!$

$=$ 右辺.

証明終