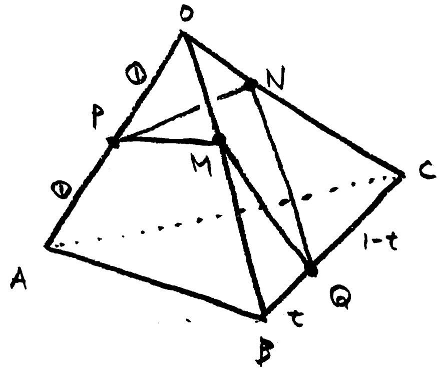
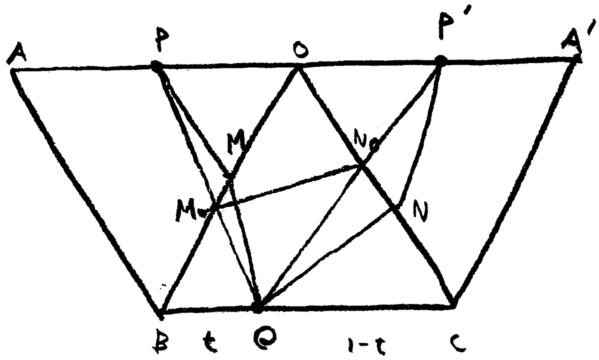
① (1) 正四面体 OABC を辺 OA で展開すると右下図のようになる。



この展開図から、PM+MQ が最小となるのは、P, M, Q が一直線上に並んだときであることが分かる

(このときの M を M_0 とする)



$\triangle M_0OP \sim M_0BQ$ より

$OM_0 : M_0B = OP : BQ = \frac{1}{2} : t$

よって $\overrightarrow{OM}$ が

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} = \frac{1}{1+2t}\vec{b}$$

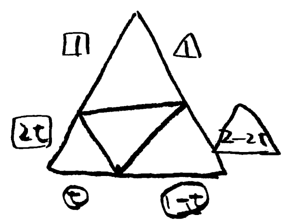
のとき、PM+MQ は最小となる。

また同様に

$P'N+NQ \geqq P'Q$ より、$P'N_0 : N_0Q = \frac{1}{2} : 1-t = 1 : 2-2t$.

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON_0} = \frac{1}{1+2-2t}\vec{c} = \frac{1}{3-2t}\vec{c}$$

$$\underline{\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+2t}\vec{b},\ \overrightarrow{ON} = \frac{1}{3-2t}\vec{c}}$$



(2) $\triangle QMN = \triangle OBC - \triangle OMN - \triangle BMQ - \triangle CNQ$

$$= \frac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin 60^\circ - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3-2t}\times\frac{1}{1+2t}\sin 60^\circ - \frac{1}{2}\times t\times\frac{2t}{1+2t}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\times(1-t)\frac{2-2t}{3-2t}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(1 - \frac{1+2t^2(3-2t)+2(1-t)^2(1+2t)}{(3-2t)(1+2t)}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,t(1-t)}{(1+2t)(3-2t)}$$

(3) $f(t) = \frac{\sqrt{3}(t-t^2)}{(3-2t)(1+2t)}$ とおく

最後、スペースなかったので省略ぎみです。

$$f(t) = \frac{\sqrt{3}(t-t^2)}{4(t-t^2)+3} = \frac{\sqrt{3}}{4+\frac{3}{t-t^2}}$$

ここで $\frac{3}{t-t^2} = \frac{3}{-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}} \geqq \frac{3}{0^2+\frac{1}{4}} = 12$. なので $f(t) \leqq \frac{\sqrt{3}}{4+12} = \frac{\sqrt{3}}{16}$

② (1) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲では $\cos\theta\sin\theta>0$ なので条件は

$$a=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

と表すことができる。上式右辺を $f(\theta)$ とおくと

$$f'(\theta)=\frac{-\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=-\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(1-\cos\theta\sin\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta>0$、$\sin\theta>0$ なので $\cos\theta+\sin\theta>0$

また、$\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta\leqq\frac{1}{2}$ だから $1-\cos\theta\sin\theta\geqq\frac{1}{2}$

以上より、$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において $f(\theta)$ は必ず負であり、

$f(\theta)$ は単調に減少する.

$$\lim_{\theta\to+0}f(\theta)=$$

③ (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおく　($x>0$ とする)

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	+	0	−
$f(x)$	／	↗		↘

$f'(x)=0$ となるのは $x=e$ のときで、

$f(x)$の増減は右のようになる

したがって $f(x)$ は $x>0$ の範囲で、

$$f(x)\leqq f(e)=\frac{1}{e}$$

を満たしている。

したがって正の実数 a に対して、$\dfrac{\log a}{a}\leqq\dfrac{1}{e}$ が成り立つ。

b, c についても同様

よって　$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}\leqq\frac{3}{e}\quad\cdots①$$

ここで　$\dfrac{3}{e}<\dfrac{3}{2.7}=\dfrac{10}{9}$，$\log 4=2\log 2>2\times 0.6=1.2$

より　$$\frac{3}{e}<\frac{10}{9}<1.2<\log 4\quad\cdots②$$

①,②より　$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}<\log 4$$

(2) (1)の不等式の両辺に abc をかける

$$bc\log a+ca\log b+ab\log c<abc\log 4$$

$$\Leftrightarrow\quad \log a^{bc}b^{ca}c^{ab}<\log 4^{abc}$$

$$\Leftrightarrow\quad a^{bc}b^{ca}c^{ab}<4^{abc}$$

問題文の条件から、　$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}<4^{abc}$

d は3以上の自然数なので上式を満たす値は3しかない　$d=3$

$$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=3^{abc}\quad\cdots③$$

③式右辺は3のみを素因数にもつ自然数。また $a\leqq b\leqq c$ であることを考慮すると、a, b, c は

$(a, b, c) = (1, 1, 3), (1, 3, 3), (3, 3, 3)$

のいずれかであることが必要.

$(a, b, c) = (1, 1, 3)$ のとき

③式左辺 $= 3^1$ ，右辺 $= 3^3$ となり不適

$(a, b, c) = (1, 3, 3)$ のとき

③式左辺 $= 3^3 \cdot 3^3$, 右辺 $= 3^{1\cdot3\cdot3} = 3^9$ となり不適

$(a, b, c) = (3, 3, 3)$ のとき

③式左辺 $= 3^9 \cdot 3^9 \cdot 3^9 = 3^{27}$, 右辺 $= 3^{3\cdot3\cdot3} = 3^{27} =$ 左辺

以上より

$(a, b, c, d) = (3, 3, 3, 3)$

④ (1) C と $y=a$ の交点は

$$a = \frac{1}{\sin x \cos x} \iff \sin x \cos x = \frac{1}{a}$$

を満たす。また、

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x = 1 + \frac{2}{a} > 0$$

より $\sin x + \cos x = \sqrt{1+\frac{2}{a}}$ （∵ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin x$, $\cos x$ はともに正）

よって $\sin x$, $\cos x$ は

$$t^2 - \sqrt{1+\frac{2}{a}}\,t + \frac{1}{a} = 0$$

の解。 これを解く.

$$t = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{a}} \pm \sqrt{1+\frac{2}{a}-\frac{4}{a}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{a}} \pm \sqrt{1-\frac{2}{a}}\right)$$

$\alpha < \beta$ のとき $\cos\alpha > \cos\beta$ だから.

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2}{a}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2}{a}},\ \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2}{a}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2}{a}}\right)$$

$$(\cos\beta, \sin\beta) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2}{a}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2}{a}},\ \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2}{a}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2}{a}}\right)$$

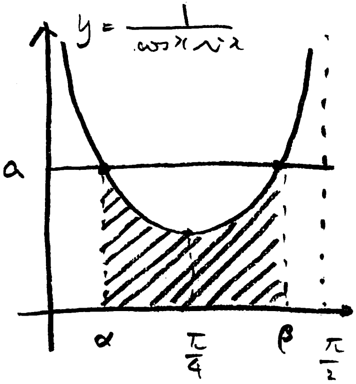
よって

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{a}} - \sqrt{1-\frac{2}{a}}}{\sqrt{1+\frac{2}{a}} + \sqrt{1-\frac{2}{a}}} = \frac{a}{2}\left(1 - \sqrt{1-\frac{4}{a^2}}\right) = \frac{a - \sqrt{a^2-4}}{2}$$

$$\tan\beta = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1-\frac{4}{a^2}}\right) = \frac{a + \sqrt{a^2-4}}{2}$$

(2) $S = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{1}{\cos x \sin x}\,dx$

$\tan x = t$ とおく. $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$



$$S = \int_{\tan\alpha}^{\tan\beta} \frac{1}{\cos x \sin x} \times \cos^2 x\,dt$$

$$= \int_{\tan\alpha}^{\tan\beta} \frac{1}{t}\,dt = \Big[\log|t|\Big]_{\tan\alpha}^{\tan\beta}$$

$$= \log|\tan\beta| - \log|\tan\alpha|$$

$$= \log\left|\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\right|$$

$$= \log\left|\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{a-\sqrt{a^2-4}}\right| = \underline{2\log\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}$$

(3) $$V = \pi\int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{\cos x \sin x}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_{\tan\alpha}^{\tan\beta} \frac{1}{\sin^2 x}\, dt$$

$$= \pi\int_{\tan\alpha}^{\tan\beta} 1 + \frac{1}{\tan^2 x}\, dt = \pi\int_{\tan\alpha}^{\tan\beta} 1 + \frac{1}{t^2}\, dt$$

$$= \pi\left[t - \frac{1}{t}\right]_{\tan\alpha}^{\tan\beta}$$

$$= \pi\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} - \frac{2}{a+\sqrt{a^2-4}}\right) - \pi\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} - \frac{2}{a-\sqrt{a^2-4}}\right)$$

$$= \pi\sqrt{a^2-4} + \pi\sqrt{a^2-4} = \underline{2\pi\sqrt{a^2-4}}$$