近畿大2021 1/31

1 (1) $x = 1+\sqrt{5}i \iff x-1 = \sqrt{5}i$

両辺2乗して $x^2-2x+1=-5 \iff x^2-2x+6=0$

$$
\begin{array}{r}
x \quad -1 \\
x^2-2x+6 \overline{\big)\, x^3 -3x^2 +3x -1} \\
\underline{x^3 -2x^2 +6x } \\
-x^2 -3x -1 \\
\underline{-x^2 +2x -6} \\
-5x +5
\end{array}
$$

$x^3-3x^2+3x+1 = (x^2-2x+6)(x-1) -5x+7 = f(x)$ とすると

$f(1+\sqrt{5}i) = -5(1+\sqrt{5}i)+5$

$= -5\sqrt{5}i$

(2) $\log_2 5 \times \dfrac{\log_2 7}{\log_2 5} \times \dfrac{\log_2 2^4}{\log_2 7} = 4$

(3) $8^a = 2^{a^3} = 5^3 = 125$

$b = \dfrac{\log_2 7}{\log_2 8} = \log_2 7^{\frac{1}{3}}$ $\qquad 2^b = 7^{\frac{1}{3}}$

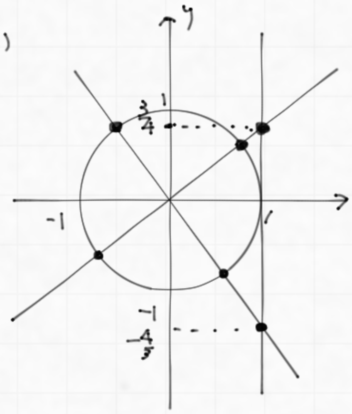
(4)

(i) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{24}{7} \iff 12\tan^2\alpha + 7\tan\alpha - 12 = 0$

$\iff (4\tan\alpha - 3)(3\tan\alpha + 4) = 0$ $\qquad \therefore \tan\alpha = \dfrac{3}{4}, -\dfrac{4}{3}$ $\qquad$ 2個存在する

最小のものは $\tan\alpha = \dfrac{-4}{3}$

(ii)



$\sin\alpha$ のとりうる値は左図の4個．順に

$\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}$

(iii)

$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ $\quad \sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{7}{5}$

$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ 〃 $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ $\quad \sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{5}$

$\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$ 〃 $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$ $\quad \sin\alpha + \cos\alpha = -\dfrac{7}{5}$

$\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$ 〃 $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ $\quad \sin\alpha + \cos\alpha = -\dfrac{1}{5}$

値は4個 最大のものは $\dfrac{7}{5}$

II

(1) (i) ${}_9P_3 = 9\times8\times7 = \mathbf{504}$

(ii) $504 = 2^3\cdot3^2\cdot7^1$ だから異なる素因数は 2.3.7の 3個

約数は 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 56, 63, 72, 84, 126, 189, 252, 504

大きい方から6個目は **72**

(iii) 約数は $2^a\cdot3^b\cdot7^c$ $(a=0,1,2,3,\ b=0,1,2,\ c=0,1)$

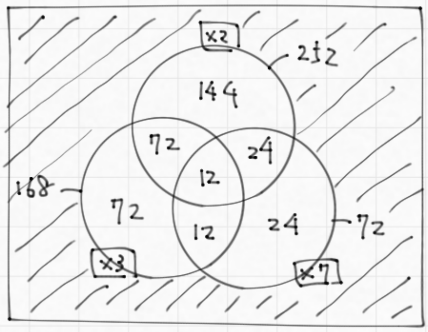
$4\times3\times2=\mathbf{24}$個

総和は $(2^0+2^1+2^2+2^3)(3^0+3^1+3^2)(7^0+7^1) = 15\times13\times8=\mathbf{1560}$

(iv) $504\div2=252$ $504\div6=84$ $504\div42=12$

$504\div3=168$ $504\div14=36$

$504\div7=72$ $504\div21=24$



$504-(144+72+24+72+24+12+12)=504-360=\mathbf{144}$

10^6 10^0
10000000

(2) ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

${}_nP_r$を素因数分解したとき、素因数5が7回含まれる。

1·2·3·4·**5**·6·7·8·9·**10** … **15** … **20** … **25** … **30** |

ここまでで7回

$n=\mathbf{30}$

${}_{30}P_r = \dfrac{30!}{(30-r)!}$ $0\leqq30-r\leqq4$ ∴ $\mathbf{26}\leqq r\leqq\mathbf{30}$

${}_{30}P_r$が最も大きくなるのは $r=30$ のときで ${}_{30}P_{30}=30!$

30!が素因数2を何個もっているのかを考える

1·2·3·4·5·6·7·8·9·10 … 16 … 30

$\left.\begin{array}{l} \cdots\ 30\div2=15 \\ \cdots\ 30\div2^2=7\cdots2 \\ \cdots\ 30\div2^3=3\cdots6 \\ \cdots\ 30\div2^4=1\cdots14 \end{array}\right\}$ 合計 **26**個

$\dfrac{30!}{10^7} = 2^{19}\cdot3^{10+3+1}\cdot7^4\cdot11^2\cdot13^2\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29 = 1024\times512\times9^7\times49^2\cdot11^2\cdot13^2\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29$

$\equiv 4\cdot2\cdot(-1)^7\cdot(-1)^2\cdot1^2\cdot(-1)\cdot7\cdot(-1)\cdot3\cdot(-1) \equiv 8\cdot7\cdot3 \equiv 8 \pmod{10}$ 求める1の位は **8**