① (1) $a_1 = \frac{1}{2}$ だから $a_n \neq 0$ は漸化式より明らか.

与えられた漸化式の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 3 + \frac{1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right)$$

$$= \frac{1}{a_1} + 3 \times (n-1) = 3n - 1$$

$$\therefore \underline{a_n = \frac{1}{3n-1}}$$

(2) $$a_k a_{k+1} a_{k+2} = \frac{1}{(3k-1)(3k+2)(3k+5)} = \left\{ \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} - \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} \right\} \times \frac{1}{6}$$

なので

$$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} a_{k+2} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 8}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5 \cdot 8} - \frac{1}{8 \cdot 11}\right) + \cdots + \frac{1}{6}\left\{ \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} - \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} \right\}$$

$$= \underline{\frac{1}{60} - \frac{1}{6(3n+2)(3n+5)}}$$

(3) $$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{60} - \frac{1}{6(3n+2)(3n+5)} \right\} = \underline{\frac{1}{60}}$$

② (1) ド・モアブルの定理より． $z^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta = \cos\pi + i\sin\pi = \underline{-1}$

(2) $z^7=-1 \Leftrightarrow z^7+1=0 \Leftrightarrow (z+1)(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1)=0$

ここで $z+1\neq 0$ だから $z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=0$

$\therefore\ z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z=\underline{-1}$

(3) $|z|=1$ だから $z\bar{z}=1$.

$$\cos\theta = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \underline{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}$$

(4) $$\cos 2\theta = \frac{z^2+\bar{z}^2}{2} = \frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{2} = \underline{\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)}$$

(5) $$\cos 3\theta = \frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)$$

(6) $$\cos\theta\cdot\cos 2\theta\cdot\cos 3\theta = \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(z^3+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{z^3}\right)\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right) = \frac{1}{8}\left(z^6+1+z^2+\frac{1}{z^4}+z^4+\frac{1}{z^2}+1+\frac{1}{z^6}\right) = (*)$$

ここで $z^7=-1$ より $\frac{1}{z^4}=-z^3$, $\frac{1}{z^2}=-z^5$, $\frac{1}{z^6}=-z$ を代入.

$$(*) = \frac{1}{8}\left(z^6+z^4+z^2+2-z^3-z^5-z\right) = \frac{1}{8}(2-1) = \underline{\frac{1}{8}}$$

(7) $$\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta = \cos\theta+\cos 3\theta+\cos(\pi-2\theta)$$

$$= \cos\theta+\cos 3\theta-\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}+z^3+\frac{1}{z^3}-z^2-\frac{1}{z^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(z-z^6+z^3-z^4-z^2+z^5\right)$$

$$= \frac{1}{2}(+1) = \underline{\frac{1}{2}}$$

③ $\sqrt{\pi} \leqq t \leqq x$ だから

分子について　$(x^2+\sqrt{\pi}^2)e^{\pi} < (x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2} < (x^2+\sqrt{\pi}x)e^{x^2}$

また　$\pi\log\sqrt{\pi} < t^2\log t < x^2\log x$

よって被積分関数は

$$\frac{\cancel{(x^2+\pi)}e^{\pi}}{(x-\sqrt{\pi})\cancel{(x^2+\pi)}x^2\log x} \leqq \frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{(x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi})t^2\log t} \leqq \frac{(x^2+\sqrt{\pi}x)e^{x^2}}{(x-\sqrt{\pi})(x^2+\pi)\pi\log\sqrt{\pi}}$$

$\sqrt{\pi} \leqq t \leqq x$ で積分して

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{e^{\pi}}{(x-\sqrt{\pi})x^2\log x}dt \leqq \int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{(x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi})t^2\log t}dt \leqq \int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}x)e^{x^2}}{(x-\sqrt{\pi})(x^2+\pi)\pi\log\sqrt{\pi}}dt$$

$$\frac{e^{\pi}}{\cancel{(x-\sqrt{\pi})}x^2\log x}\cancel{(x-\sqrt{\pi})} \leqq \int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{(x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi})t^2\log t}dt \leqq \frac{(x^2+\sqrt{\pi}x)e^{x^2}}{\cancel{(x-\sqrt{\pi})}(x^2+\pi)\pi\log\sqrt{\pi}}\cancel{(x-\sqrt{\pi})}$$

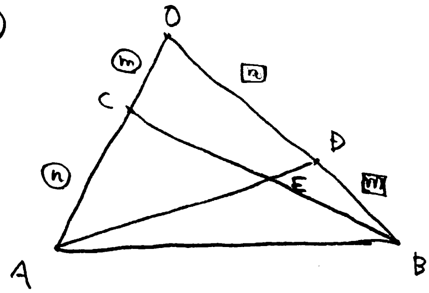
$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\frac{e^{\pi}}{x^2\log x} = \frac{e^{\pi}}{\frac{1}{2}\pi\log\pi} = \frac{2e^{\pi}}{\pi\log\pi}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}x)e^{x^2}}{(x^2+\pi)\pi\log\sqrt{\pi}} = \frac{2\cancel{(\pi+\sqrt{\pi}\sqrt{\pi})}e^{\pi}}{\cancel{(\pi+\pi)}\pi\log\pi} = \frac{2e^{\pi}}{\pi\log\pi}$$

よって、はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{(x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi})t^2\log t}dt = \underline{\frac{2e^{\pi}}{\pi\log\pi}}$$

④



メネラウスの定理より

$$\frac{OA}{AC}\times\frac{CE}{EB}\times\frac{BD}{DO}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+m}{n}\times\frac{CE}{EB}\times\frac{m}{n}=1 \qquad CE:EB=n^2:m(n+m)$$

$$\triangle AEB=\frac{BE}{BC}\triangle ABC=\frac{m(n+m)}{n^2+m(n+m)}\times\frac{n}{n+m}\triangle OAB$$

$$=\frac{nm}{n^2+nm+m^2}\triangle OAB$$

$$\therefore\ \frac{T}{S}=\frac{\triangle AEB}{\triangle OAB}=\frac{nm}{n^2+nm+m^2}$$

(2) $\dfrac{T}{S}=\dfrac{\frac{m}{n}}{1+\frac{m}{n}+\left(\frac{m}{n}\right)^2}$

ここで $1\leqq n\leqq 6$. $1\leqq m\leqq 6$ より $\frac{1}{6}\leqq\frac{m}{n}\leqq 6$

ここで $\frac{m}{n}=x$ として考えると $\frac{1}{6}\leqq x\leqq 6$.

$$\frac{T}{S}=\frac{x}{1+x+x^2}$$

x を実数で $\frac{1}{6}\leqq x\leqq 6$ の範囲を満たすものと考え $f(x)=\dfrac{x}{1+x+x^2}$ とすると.

$$f'(x)=\frac{1+x+x^2-x(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2}$$

	$\frac{1}{6}$	…	1	…	6
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

$f(x)$ の増減は右の表のようになり.

$f(x)$ は $x=1$ で最大値 $f(1)=\frac{1}{3}$ をとる.

このとき $\frac{m}{n}=1$ だから. $n=m$ のとき M が最大となることが分かる

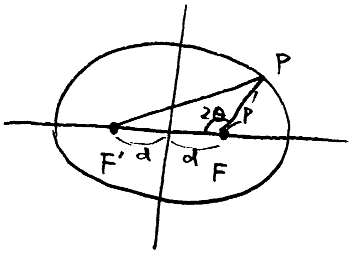
よって. $M=\frac{1}{3}$ となる確率は $\frac{6}{36}=\underline{\frac{1}{6}}$

(3) (2) で $x=\frac{1}{6}$ のとき $f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{6}{43}$.

$x=6$ のとき $f(6)=\frac{6}{43}$ だから $\frac{T}{S}$ の最小値は $\frac{6}{43}$

このとき $x=\frac{1}{6}$ または 6 だから $\underline{(n,m)=(6,1),(1,6)}$

⑤ (1)



だ円の定義より $PF'+PF=2a$.

$\therefore\ PF'=2a-p$.

$\triangle FPF'$ について、余弦定理より

$$(2a-p)^2=(2d)^2+p^2-2\cdot 2d\cdot p\cos 2\theta$$

$$4a^2-4ap=4d^2-4dp\cos 2\theta$$

$$(d\cos 2\theta-a)p=d^2-a^2$$

$$\underline{p=\frac{d^2-a^2}{d\cos 2\theta-a}}$$

同様に $\underline{q=\dfrac{d^2-b^2}{d\cos\theta-b}}$

(2) $$\frac{q}{p}=\frac{\dfrac{d^2-b^2}{d\cos\theta-b}}{\dfrac{d^2-a^2}{d\cos 2\theta-a}}=\frac{b^2-d^2}{a^2-d^2}\times\frac{a-d\cos 2\theta}{b-d\cos\theta}$$

$$\frac{a-d\cos 2\theta}{b-d\cos\theta}=\frac{a-d(2\cos^2\theta-1)}{b-d\cos\theta}\quad\cdots(*)$$

ここで $\cos\theta=x$ とおくと、$(*)$ は $\dfrac{a+d-2dx^2}{b-dx}$ であり、これを $f(x)$ とすると、

$x=\cos\theta$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より、$0<x<1$ となる。よって

$\frac{q}{p}$ が最大値をとるための条件は、$f(x)=0$ が $0<x<1$ で最大値をもつことに等しい

$$f'(x)=\frac{-4dx(b-dx)+(a+d-2dx^2)d}{(b-dx)^2}=\frac{+2d^2x^2-4bdx+ad+d^2}{(b-dx)^2}$$

$g(x)=+2d^2x^2-4bdx+ad+d^2$ とおく。

$$g(x)=+2d^2\left(x^2-\frac{2b}{d}x\right)+ad+d^2=+2d^2\left(x-\frac{b}{d}\right)^2-2b^2+ad+d^2$$

ここで $0<d<b$ より、$0<\frac{b}{d}<1$, $g(0)=ad+d^2>0$ だから

$g\left(\frac{b}{d}\right)<0$ となるとき、$g(x)=0$ となる x が $0<x<\frac{b}{d}$ の区間に存在し、

このときの x を α として、$g(x)$ の $x=\alpha$ 前後の符号は次のようになり、

$f(x)$ は極大値を持ち、したがって $\frac{q}{p}$ は最大値をもつことになる

	0	…	α	…
$g(x)$	+	+	0	−

よって条件は $\underline{d^2+ad-2b^2<0}$