① (1) $I_n+I_{n+2}=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x^{n+2}}{x^2+1}dx$

$$=\int_0^1\frac{x^n+x^{n+2}}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^n dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

(2) $0\leqq x\leqq 1$ において $\frac{x^{n+1}}{x^2+1}\geqq 0$

$0\leqq x\leqq 1$ の区間で積分して $\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx\geqq 0 \Leftrightarrow I_{n+1}\geqq 0.$

$0\leqq x\leqq 1$ の区間において

$$\frac{x^n}{x^2+1}-\frac{x^{n+1}}{x^2+1}=\frac{x^n}{x^2+1}(1-x)\geqq 0$$

積分して. $\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx\geqq 0 \Leftrightarrow I_n-I_{n+1}\geqq 0 \Leftrightarrow I_{n+1}\leqq I_n$

(1)より $I_n=\frac{1}{n+1}-I_{n+2}\leqq\frac{1}{n+1}$

以上より $0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq\frac{1}{n+1}$ が示された.

(3) (2)より

$$I_n\geqq I_{n+1}\geqq I_{n+2}$$

(1)より $\frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+2}\leqq I_n+I_n \Leftrightarrow \frac{n}{2(n+1)}\leqq nI_n \cdots ①$

(2)より

$I_n\leqq I_{n-1}\leqq I_{n-2}$ ($n\geqq 2$ のとき, 以下同じ)

(1)より $\frac{1}{(n-2)+1}=I_{n-2}+I_n\geqq 2I_n \Leftrightarrow \frac{n}{2(n-1)}\geqq nI_n\cdots ②$

①, ②より $\frac{n}{2(n+1)}\leqq nI_n\leqq\frac{n}{2(n-1)}$ $(n\geqq 2)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(1+\frac{1}{n})}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(1-\frac{1}{n})}=\frac{1}{2}$$

よって はさみうちの原理より $\underline{\lim_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}}$

(4) (1)より $\frac{1}{2k}=I_{2k-1}+I_{2k+1}$ を S_n の式に代入

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{(-1)^{k-1}(I_{2k-1}+I_{2k+1})\right\}$$

$$=(I_1+\cancel{I_3})-(\cancel{I_3}+\cancel{I_5})+(\cancel{I_5}+\cancel{I_7})-\cdots+(-1)^{n-1}(\cancel{I_{2n-1}}+I_{2n+1})$$

$$=I_1+(-1)^{n-1}I_{2n+1}.$$

ここで (2)より

$$0 \leqq I_{2n+1} \leqq \frac{1}{2n+2}$$ だから

$$0 \leqq \left|(-1)^{n-1} I_{2n+1}\right| \leqq \frac{1}{2n+2}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+2} = 0$ より、はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty}\left\{(-1)^{n-1} I_{2n+1}\right\} = 0$

また $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)} \times \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\log 2$

よって $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{I_1 + (-1)^{n-1} I_{2n+1}\right\} = \underline{\frac{1}{2}\log 2}$.

② (1) $a>1$ のとき $y=a^x$ は単調に増加する.

また、$y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y$ だから、$y=a^x$ の逆関数は、$y=\log_a x$

よって $y=a^x$ と $y=\log_a x$ は互いに逆関数であり、$y=x$ について対称となっていて、その交点は $y=x$ 上に存在する

(2) (1)より $y=x$ と $y=\log_a x$ との交点を調べればよい.

$\log_a x - x = f(x)$ として

$f'(x) = (\log a)\log_a x - 1 = (\log a)\left(\log_a x - \dfrac{1}{\log a}\right)$

$f'(x)=0$ となるのは $\log_a x = \dfrac{1}{\log a}$ 　$x = a^{\frac{1}{\log a}}$ のとき、なので

$f(x)$ の増減は下のようになる

x	0	$\cdots$	$a^{\frac{1}{\log a}}$	$\cdots$
f'		$+$	0	$-$
f		$\nearrow$		$\searrow$

$y=f(x)$ のグラフは極大値を1つしかもたないので $y=f(x)$ と x 軸との交点は最大でも2つまで. 　∴ グラフの共有点は2個以下である.

(3) (2)の $f(x)$ について、$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ だから

$y=f(x)$ と x 軸との交点が1つとなるのは 極大値が 0 となるときに限られる

$$f\left(a^{\frac{1}{\log a}}\right) = \log_a a^{\frac{1}{\log a}} - a^{\frac{1}{\log a}} = \frac{1}{\log a} - a^{\frac{1}{\log a}} = 0$$

$\dfrac{1}{\log a} = a^{\frac{1}{\log a}}$ 　ここで $\dfrac{1}{\log a} = X$ とおくと $\log a = \dfrac{1}{X}$ より $a = e^{\frac{1}{X}}$ であり

$X = \left(e^{\frac{1}{X}}\right)^X = e^1$ 　∴ $X = e$, つまり $a = e^{\frac{1}{e}}$

このとき、$x = a^{\frac{1}{\log a}}$ は $x = \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^e = e = y$

$a = e^{\frac{1}{e}}$, $(x, y) = (e, e)$

③ (1) $(a+b)^p-a^p-b^p$

$$=\sum_{k=0}^{p}\left({}_pC_k a^{p-k}b^k\right)-a^p-b^p=\sum_{k=1}^{p-1}{}_pC_k a^{p-k}b^k \cdots ①$$

ここで $1\leqq k\leqq p-1$ を満たす自然数 k について

$$ {}_pC_k=\frac{p!}{k!(p-k)!}$$

となるが、上式左辺は必ず整数で右辺の分母は、pよりも小さい整数の積なので素数である p を素因数には持たない。しかし、分子は $1\sim p$ までの積なので p を素因数にもつ。よって、右辺は p の倍数、

したがって ① 式の $p-1$ 個の項は全て p の倍数であり、① は p の倍数である

(2) ① で $b=2$ とすると

$$\sum_{k=1}^{p-1}{}_pC_k a^{p-k}2^k = 2\sum_{k=1}^{p-1}{}_pC_k a^{p-k}\cdot 2^{k-1}$$

となるが、上の式の ${}_pC_k a^{p-k}\cdot 2^{k-1}$ は ${}_pC_k$, a^{p-k}, 2^{k-1} が $1\leqq k\leqq p-1$ において全て整数値をとるので、2の倍数 (これを $2z$ と表す)

$$(a+2)^p-a^p-2^p=2z$$

$$\Leftrightarrow\ (a+2)^p-a^p=2z+2^p=2(z+2^{p-1})$$

となるので、$(a+2)^p-a^p$ は偶数である。

(3) $(a+2)^p-a^p={}_pC_1a^{p-1}\cdot 2+{}_pC_2a^{p-2}\cdot 2^2+\cdots+{}_pC_{p-1}a^1\cdot 2^{p-1}+{}_pC_p\cdot 2^p$

${}_pC_1\sim{}_pC_{p-1}$ は p の倍数だから、

$(a+2)^p-a^p\equiv 2^p \pmod{2p}$

(i) $p\geqq 3$ のとき

(1) で $a=b=1$ とすると

2^p-1-1 は p の倍数、であり、また $2^p-2=2(2^{p-1}-1)$ より、2の倍数

$2^p-2\equiv 0 \pmod{2p}$

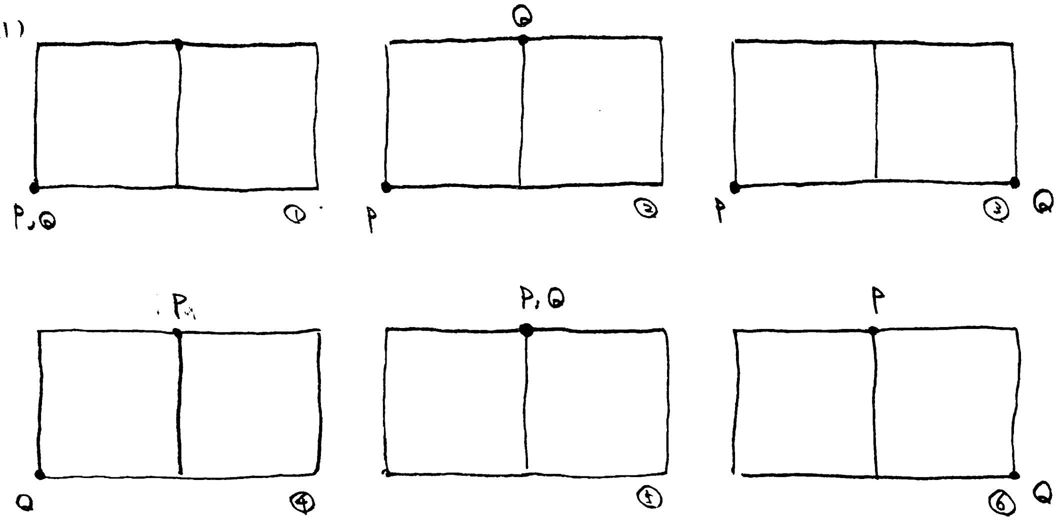
$2^p\equiv 2 \pmod{2p}$

(ii) $p=2$ のとき

$2^2=4\equiv 0 \pmod{2\cdot 2}$

以上より、$(a+2)^p-a^p$ を $2p$ で割った余りは $p\geqq 3$ のとき 2、$p=2$ のとき 0

④ (1)



(2) (1)の6つのパターンを左上から右上、左下から右下の順に①.②.③.④.⑤.⑥とする

p_1は②.③.④.⑥の4パターン　$p_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times4=\frac{2}{3}$

a_1は②.④⑥の3パターン　$a_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times3=\frac{1}{2}$

$b_1=p_1-a_1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

②.④⑥のように同一の正方形にP.Qが存在する状態を同、

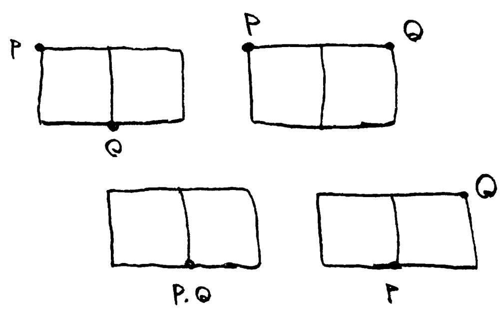
③のように同一の正方形に存在しない状態を異と表す。

同 → 同 となる確率は a_1 と同じで $\frac{1}{2}$

同 → 異　〃　b_1　〃　$\frac{1}{6}$

異 → 同　〃

③の次の時刻の状態として右の4つが考えられ、全て等しい確率($\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$)で起こるので　$\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$



異 → 異 は $\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$

$$a_2=a_1\times\frac{1}{2}+b_1\times\frac{1}{2}=p_1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$b_2=a_1\times\frac{1}{6}+b_1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}$$

$a_1=\frac{1}{2}$, $b_1=\frac{1}{6}$, $a_2=\frac{1}{3}$, $b_2=\frac{1}{8}$

(3) (2) の考え方より

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n$$

(4) $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n$

$$= \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n$$

$$\leqq \frac{3}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n$$

$$\leqq \frac{3}{4}(a_n + b_n)$$

$\therefore\ p_{n+1} \leqq \frac{3}{4}p_n$

$p_n \leqq \frac{3}{4}p_{n-1} \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^2 p_{n-1} \leqq \cdots \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} p_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3} \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

よって $p_n \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^n$