①

(1) $n=p^2q$ のとき n の約数は $1, p, p^2, q, qp, qp^2$ の6通り。

$S(n)=2n$ より

$$1+p+p^2+q+qp+qp^2=2n$$

$$(1+p+p^2)(1+q)=2p^2q$$

ここで $1+p+p^2$ は p の倍数ではないので、$1+q$ は p^2 の倍数となっている。

また $1+p+p^2=1+p(p+1)$ だから、$1+p+p^2$ は奇数であり、

したがって、$1+q$ は偶数。(∵ 右辺は偶数)

以上より $1+q=2p^2$ かつ $1+p+p^2=q$

連立して、$p^2+p+1=2p^2-1 \iff p^2-p-2=0$ 、$\therefore p=2,-1$

p は素数なので $p=2$、$q=7$ $\therefore n=2^2 \cdot 7=\underline{28}$

(2) n の約数として 1 と n は必ず含まれるので $S(n) \geqq 1+n$

この等号が成立するのは n の約数が 1 と n しかないとき、すなわち、n が素数のときである。

したがって示すべきことは 2^a-1 が素数ならば a が素数であること、である。

ここで仮に a が合成数だとし、$a=bc$ と表せるものとする。(b, c は2以上の数)、このとき

$$2^a-1=2^{bc}-1=(2^b)^c-1$$

$$=(2^b-1)\left((2^b)^{c-1}+(2^b)^{c-2}+\cdots+2^b+1\right)$$

$2^b-1>1$ 、$2^{b(c-1)}+2^{b(c-2)}+\cdots+2^b+1>1$ なので、これは合成数

つまり、a が合成数ならば、2^a-1 は合成数。

したがって 2^a-1 が素数ならば a は素数に限られる。

(3) nの約数のうちに、

$1,\ 2^a-1,\ 2(2^a-1),\ 2^2(2^a-1),\ \cdots,\ 2^{a-1}(2^a-1)$

$,2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots\ 2^{a-1}$

は必ず含まれている。これらの和は

$$(1+2+\cdots+2^{a-1})(2^a-1)+2\times\frac{2^{a-1}-1}{2-1}$$

$$=(2^a-1)(2^a-1)+2^a-1-1$$

$$=2^a(2^a-1)-1$$

$$=2n-1$$

したがって 2^a-1 が合成数だとすると $S(n)>2n$ となる。

よって 2^a-1 は素数でなければならず、そのとき、a は素数。

$a=2$ のとき、$n=2^1(2^2-1)=6$ となり このとき

$S(n)=1+2+3+6=12\leqq 2\times 6$

を満たす。

a が3以上の奇数のとき、

$2^3\equiv 8,\ 2^5\equiv 2,\ 2^7\equiv 8,\ 2^9\equiv 2,\ \cdots \pmod{10}$

$2^2\equiv 4,\ 2^4\equiv 6,\ 2^6\equiv 4,\ 2^8\equiv 6,\ \cdots$ (〃)

となっているので

$2^a(2^{a-1}-1)\equiv 6\times(2-1)\equiv 6 \pmod{10}$

$2^a(2^{a-1}-1)\equiv 4\times(8-1)\equiv 8$ (〃)

よって $n=2^a(2^a-1)$ が $S(n)\leqq 2n$ を満たすとき、nの1の位は6または8であることが示された

(4) $S(n)=1+p+q+pq=(1+p)(1+q)=24=2^3\times 3$

$2\leqq p<q$ とすると $(1+p,\ 1+q)=(3,8),(4,6)$

のいずれかで、$(p,q)=(2,7),(3,5)$ $\underline{n=14,15}$

(5) $S(n) = 1+p+q+pq \geqq 2pq$

$pq-p-q-1 \leqq 0$

$(p-1)(q-1) \leqq 2$

$2 \leqq p < q$ とすると $(p-1, q-1) = (1, 2)$

$\therefore\ (p, q) = (2, 3)$ $\qquad \underline{n = 6}$

(6) $S(n) = 1+p+p^2+q+pq+pq^2 \geqq 2p^2q$

$\therefore\ (p^2-p-1)q \leqq p^2+p+1$

ここで $p^2-p-1 = (p-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4} \geqq (2-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4} = 1$ なので上式は

$$q \leqq \frac{p^2+p+1}{p^2-p-1} = 1+\frac{2p+2}{p^2-p-1} \quad \cdots ①$$

$f(x) = 1+\dfrac{2x+2}{x^2-x-1}$ とおくと $f'(x) = \dfrac{2x^2-2x-2-(2x+2)(2x-1)}{(x^2-x-1)^2}$

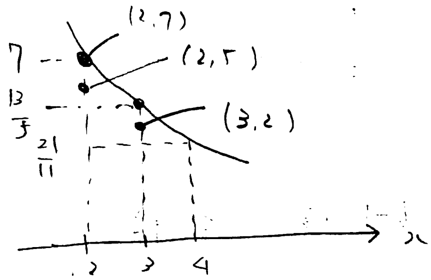
$$= \frac{-2x^2-4x}{(x^2-x-1)^2} = \frac{-2x(x+2)}{(x^2-x-1)^2}$$

より $x>2$ で単調に減少するので $f(x)$ は $x \geqq 2$ において

$f(x) \leqq f(2) = 7$, $f(3) = \frac{13}{5}$, $f(4) = \frac{21}{11}$

よって①を満たす素数 p, q の組合わせは

$(p, q) = (2,3), (2,5), (2,7), (3,2)$ の4通り

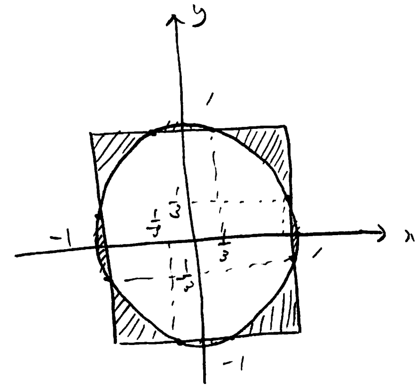


$n = 12, 20, 28, 18$

② (1) $z=0$ とすると S は $x^2+y^2 \leqq \frac{10}{9}$

$x=1$ のとき $y=\pm\frac{1}{3}$

などから右図のようになる

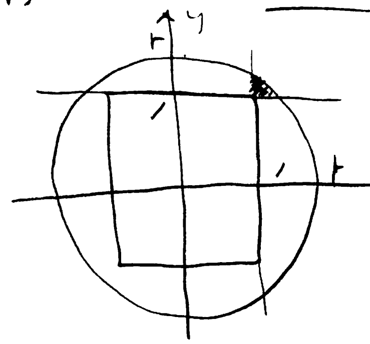


(2) $x=1$ のとき $y^2+z^2 \leqq r^2-1$

を満たす y, z が存在しなければ $S_x=\phi$ となる

ので $r_1=1$

このとき S は Q に完全に含まれているので $V(r) = 2^3-\frac{4}{3}\pi 1^3 = \underline{8-\frac{4}{3}\pi}$



r_2 について、右図斜線部が存在すればよいので $r_2=\sqrt{2}$

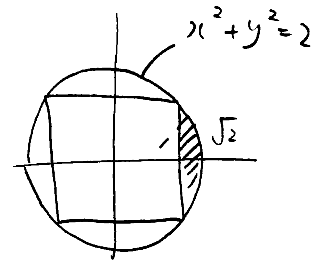
いらなかった…

このとき S のうち、Q からはみ出ている部分の体積は右下図の斜線部を回転させた体積6個分なので

$$6\int_1^{\sqrt{2}} \pi y^2 dx = 6\pi\int_1^{\sqrt{2}} 2-x^2 dx$$

$$=6\pi\left[2x-\frac{1}{3}x^3\right]_1^{\sqrt{2}} = 6\pi\times\frac{4}{3}\sqrt{2}-10\pi$$

$$=(8\sqrt{2}-10)\pi$$



球のうち上記部分を除いた $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3-(8\sqrt{2}-10)\pi = (10-\frac{16}{3}\sqrt{2})\pi$ が

Q の内部にあるので、Q のうち S の外にあるものは $8-(10-\frac{16}{3}\sqrt{2})\pi$

これと S のうち Q の外にあるものを考えて

$$V(r_2) = 8-10\pi+\frac{16}{3}\sqrt{2}\pi-8\sqrt{2}\pi+10\pi = \underline{8-\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi}$$

r_3 について $(1,1,1)$ が S に含まれればよいので $r_3=\sqrt{3}$

このとき Q は S に完全に含まれているので

$$V(r_3) = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3-8 = 4\sqrt{3}\pi-8$$

(3) $\int_1^r \pi y^2 dx = \int_1^r \pi(r^2-x^2)dx = \left[\pi r^2 x-\frac{1}{3}\pi x^3\right]_1^r = \underline{\frac{2}{3}\pi r^3-\pi r^2+\frac{1}{3}\pi}$

(4) (i) $r_1 \leqq r \leqq r_2$ のとき

(3)の体積を V_3 とすると

$\overline{Q} \cap S$ の体積は $6V_3$

$Q \cap \overline{S}$ の体積は Q から $Q \cap S$ の体積を除いたものなので

$$2^3 - \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - 6V_3\right)$$

よって $V(r) = 8 - \frac{4}{3}\pi r^3 + 12V_3 = 8 - \frac{4}{3}\pi r^3 + 12\left(\frac{2}{3}\pi r^3 - \pi r^2 + \frac{1}{3}\pi\right)$

$= \frac{20}{3}\pi r^3 - 12\pi r^2 + 4\pi + 8$

$V'(r) = 20\pi r^2 - 24\pi r = 4\pi r(5r - 6)$

$r = \frac{6}{5}, 0$ のとき $V'(r) = 0$

(ii) $0 \leqq r \leqq r_1$ のとき

$V(r) = 8 - \frac{4}{3}\pi r^3$, $V'(r) = -4\pi r^2$

(i)(ii)より $V(r)$ の増減は下のようになる

r	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$V'(r)$		$-$		$-$	0	$+$	
$V(r)$		↘		↘		↗	

以上より $r = \frac{6}{5}$ のとき最小となる.

③ (1) $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)-(x-1)-|x-1|+\frac{1}{2}(x-2+|x-2|)$

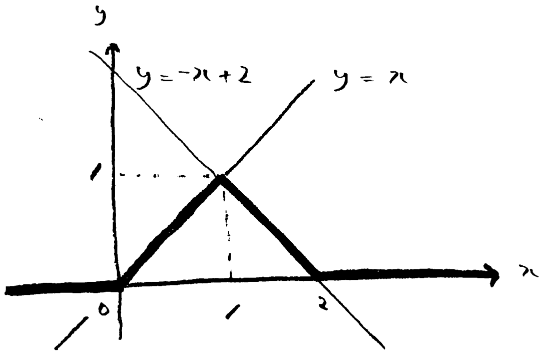
$=\frac{1}{2}|x|-|x-1|+\frac{1}{2}|x-2|$

(i) $x<0$ のとき $f(x)=-\frac{1}{2}x+x-1-\frac{1}{2}x+1=0$

(ii) $0\leqq x<1$ のとき $f(x)=\frac{1}{2}x+x-1-\frac{1}{2}x+1=x$

(iii) $1\leqq x<2$ のとき $f(x)=\frac{1}{2}x-x+1-\frac{1}{2}x+1=-x+2$

(iv) $2\leqq x$ のとき $f(x)=\frac{1}{2}x-x+1+\frac{1}{2}x-1=0$



(2) $x-t=s$ とおく $\frac{ds}{dt}=-1$.
$\begin{array}{c|c} t & 0\to 1 \\ \hline s & x\to x-1 \end{array}$

$g(x)=\int_x^{x-1}f(s)(-ds)$

$=\int_{x-1}^{x}f(s)\,ds$

これは $f(x)$ のグラフを幅1の範囲で積分したものなので

$x=\frac{3}{2}$ のとき最大となる.

$g(\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}f(s)ds=(\frac{1}{2}+1)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2=\underline{\frac{3}{4}}$

(3) (i) $x<0$ のとき $g(x)=\int_{x-1}^{x}f(s)ds=\int_{x-1}^{x}0\,ds=0$

(ii) $0\leqq x<1$ のとき $g(x)=\int_0^x s\,ds=\frac{1}{2}x^2$

(iii) $1\leqq x<2$ 〃 $g(x)=\int_{x-1}^{1}s\,ds+\int_1^x 2-s\,ds$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x-1)^2+2x-\frac{1}{2}x^2-2+\frac{1}{2}=-x^2+3x-\frac{3}{2}$

(iv) $2 \leqq x \leqq 3$ のとき

$$g(x) = \int_{x-1}^{2} 2-s\,ds = \left[2s - \frac{1}{2}s^2\right]_{x-1}^{2}$$

$$= 4 - 2 - 2(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$p(s) = \int_0^3 (x-s)^2 g(x)\,dx \qquad x^2 - 2sx + s^2$$

$$= \int_0^1 (x-s)^2 \times \frac{1}{2}x^2\,dx + \int_1^2 (x-s)^2 \cdot \left(-x^2+3x-\frac{3}{2}\right)dx + \int_2^3 (x-s)^2\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x^4 - sx^3 + \frac{1}{2}x^2s^2\,dx + \int_1^2 -x^4 + 3x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2sx^3 - 6sx^2 + 3sx - s^2x^2 + 3s^2x - \frac{3}{2}s^2\,dx$$

$$+ \int_2^3 \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 - sx^3 + 6sx^2 - 9sx + \frac{1}{2}s^2x^2 - 3s^2x + \frac{9}{2}s^2\,dx$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{4}s + \frac{1}{6}s^2 + \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}sx^4 - 2sx^3 + \frac{3}{2}sx^2 - \frac{1}{3}s^2x^3 + \frac{3}{2}s^2x^2 - \frac{3}{2}s^2x\right]_1^2$$

$$+ \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{4}sx^4 + 2sx^3 - \frac{9}{2}sx^2 + \frac{1}{6}s^2x^3 - \frac{3}{2}s^2x^2 + \frac{9}{2}s^2x\right]_2^3$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{4}s + \frac{1}{6}s^2 - \frac{32}{5} + \cancel{6} - 4 + \cancel{8s} - 16s + \cancel{6s} - \cancel{\frac{8}{3}s^2} + \cancel{6s^2} - \cancel{3s^2}$$

$$+ \frac{1}{5} - \frac{3}{4} + \boxed{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}s} + \cancel{2s} - \frac{3}{2}s + \frac{1}{3}s^2 - \cancel{\frac{3}{2}s^2} + \cancel{\frac{3}{2}s^2}$$

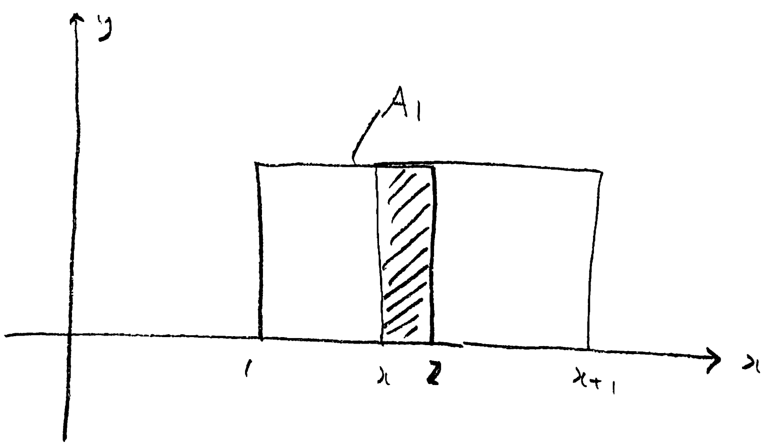
$$+ \frac{1}{10} \times 243 - \frac{81}{4} + \boxed{\frac{81}{2}} - \frac{81}{4}s + \cancel{54s} - \cancel{\frac{81}{2}s} + \frac{9}{2}s^2 - \cancel{\frac{27}{2}s^2} + \cancel{\frac{27}{2}s^2}$$

$$- \frac{32}{10} + \cancel{6} - \cancel{12} + \cancel{4s} - \cancel{16s} + \cancel{18s} - \cancel{\frac{4}{3}s^2} + \cancel{6s^2} - \cancel{9s^2}$$

$$= s^2 - 3s + \frac{5}{2} = \left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

∴ $p(s)$ の最小値は $p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$

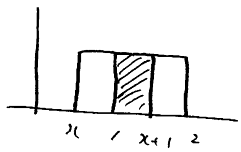
④



(1) (i) $x+1 \leqq 1$ または $x \geqq 2$ のとき ($x \leqq 0,\ x \geqq 2$)

共通部分は存在しないので $f(x) = 0$

(ii) $x \leqq 1 < x+1$ のとき ($0 < x \leqq 1$)



$f(x) = \{(x+1) - 1\} \times 1 = x$.

(iii) $x < 2 < x+1$ のとき ($1 < x < 2$)

$f(x) = (2-x) \times 1 = 2-x$

(i),(ii)(iii)より

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqq 0,\ x \geqq 2) \\ x & (0 < x \leqq 1) \\ 2-x & (1 < x < 2) \end{cases}$$