①　(1)　$f(x)=(1+x)e^{x}=0$

$e^{x}>0$ だから，$\underline{x=-1}$

(2)　$f'(x)=e^{x}+(1+x)e^{x}=(2+x)e^{x}$

$y=f(x)$ 上の $(t, f(t))$ における接線は，

$$y=(2+t)e^{t}(x-t)+(1+t)e^{t}$$

$$y=(2+t)e^{t}x+(-t^{2}-t+1)e^{t}$$

これが原点を通るとき，

$$0=(2+t)e^{t}\times 0-(t^{2}+t-1)e^{t}$$

$$(t^{2}+t-1)e^{t}=0$$

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

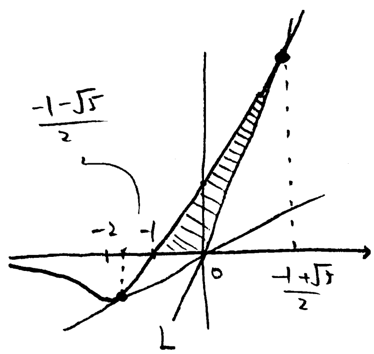
$f\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)e^{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$ だから接線は　$y=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}x$

(3)　$f'(x)=0$ となるのは $x=-2$ のとき，

$y=f(x)$ の増減および概形は

次の通り

x	$\cdots$ -2 $\cdots$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$\searrow$ $-e^{-2}$ $\nearrow$



もとめる面積を S，$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\alpha$ とすると

$$S=\int_{-1}^{\alpha}f(x)dx-\frac{1}{2}\alpha f(\alpha)=\Big[(1+x)e^{x}-e^{x}\Big]_{-1}^{\alpha}-\frac{1}{2}\alpha(1+\alpha)e^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha-\alpha^{2})e^{\alpha}+\frac{1}{e}=\frac{1}{2}(\alpha-1+\alpha)e^{\alpha}+\frac{1}{e}=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}-1\right)e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1}{e}$$

$$=\underline{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-2)e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1}{e}}$$

② (1) 1回目に必ずⒷに移り、その後Ⓑにとどまる。

$$\frac{3}{6}\times\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}=\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

(2) (i) 1回目にⓒに移り、その後ⓒにとどまるのは、 $\frac{2}{6}\times\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(ii) 1回目にⒷに移り、 〃 k回目にⓒに移って、その後ⓒにとどまるのは

$$\frac{3}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^{k-2}\times\frac{3}{6}\times\left(\frac{4}{6}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}\qquad(2\leqq k\leqq n)$$

(i)(ii)より、もとめる確率を P_c とすると

$$P_c=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\underline{\frac{13}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}}$$

(3) もとめる確率を P_n とすると

(i) $n=1$のとき　1回目に4がでる　$P_1=\frac{1}{6}$

(ii) $n\geqq2$ 〃　$n-1$回目にBまたはCにいるので

$$P_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)-1}\times\frac{1}{6}+\left\{\frac{13}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1-2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-2}\right\}\times\frac{2}{6}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{13}{54}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{13}{54}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$$

$$P_n=\begin{cases}\frac{1}{6} & (n=1)\\ \frac{13}{54}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & (n\geqq2)\end{cases}$$

③ (1) 判別式を D として

$$D = k^2 - 4(3k-4) = k^2 - 12k + 16 < 0 \iff \underline{6-2\sqrt{5} < k < 6+2\sqrt{5}}$$

(2) $\alpha^2 - k\alpha + 3k - 4 = 0$

$$\alpha = \frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{-k^2+12k-16}}{2} i$$

$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると　$\alpha^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$ であり,

これが実数となるのは, $4\theta = 180° \times n$　(nは整数)

つまり　$\theta = 45° \times n$ を満たすときである.

αは虚数だから, $0° \leqq \theta < 360°$ の範囲で題意を満たすのは $n = 1, 2, 3, 5, 6, 7$

$n = 1, 3, 5, 7$ のとき

$$|k| = \sqrt{-k^2+12k-16} \iff k^2 = -k^2 + 12k - 16$$

$$\iff k^2 - 6k + 8 = 0. \iff k = 2, 4$$

これらはいずれも(1)を満たす.

$n = 2, 6$ のとき.

αは虚数なので $k = 0$. これは(1)を満たさない.

以上より　$\underline{k = 2, 4}$

③(2) 別解

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & \alpha^2 + k\alpha + k^2 - 3k + 4 \\
\alpha^2 - k\alpha + 3k - 4 \,\big) & \alpha^4 \\
 & \alpha^4 - k\alpha^3 + (3k-4)\alpha^2 \\
\hline
 & k\alpha^3 - (3k-4)\alpha^2 \\
 & k\alpha^3 - k^2\alpha^2 + (3k-4)k\alpha \\
\hline
 & (k^2-3k+4)\alpha^2 - (3k-4)k\alpha \\
 & (k^2-3k+4)\alpha^2 - k(k^2-3k+4)\alpha + (k^2-3k+4)(3k-4) \\
\hline
 & (k^3-6k^2+8k)\alpha + (k^2-3k+4)(3k-4) \quad \cdots ①
\end{array}
$$

αは虚数だから ①が実数となるのは $k^3-6k^2+8k=0$ のときで

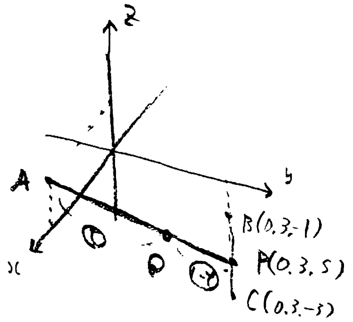
$k(k-4)(k-2)=0$ より $k=0, 2, 4$

このうち ①を満たすのは $k=2, 4$.

④ (1) $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OP} + (1-t)\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2-2t \\ 3t \\ st+1-t \end{pmatrix}$

よってKの方程式は

$$\underline{(x-2+2t)^2+(y-3t)^2+(z-st-1+t)^2=3^2}$$



(2) xy平面は $z=0$. これをKの式と連立.

$$(x-2+2t)^2+(y-3t)^2 = 9-(t-1-st)^2$$

$$S_1 = \pi\{9-(t-1-st)^2\}$$

(3) yz平面とKを連立.

$$(y-3t)^2+(z-st-1+t)^2 = 9-(2t-2)^2$$

$$S_2 = \pi\{9-(2t-2)\}^2$$

$$S_1+S_2 = \pi\{18-(t-1-st)^2-(2t-2)^2\}$$

これを$f(t)$とおく.

$$f(t) = \pi\{(-s^2+2s-5)t^2+(10-2s)t+13\}$$

$$f'(t) = 2\pi(-s^2+2s-5)t+(10-2s)\pi$$

$f'(t)=0$ となるのは $t=\dfrac{10-2s}{2(s^2-2s+5)} = \dfrac{5-s}{s^2-2s+5}$

sはBC上にあるので $-3\leqq s\leqq -1$ で,

このとき $s^2-2s+5=(s-1)^2+4$ より. $8<s^2-2s+5<20$, $6<5-s<8$

だから. $0<\dfrac{5-s}{s^2-2s+5}<1$

よって $f(t)$は $t=\dfrac{5-s}{s^2-2s+5}$ で最小となる.

(4) QがAPの中点であるのは $t=\frac{1}{2}$のとき. だから.

$$\frac{1}{2} = \frac{5-s}{s^2-2s+5} \iff s=\pm\sqrt{5}.$$

$-3<s<-1$ を満たすのは $\underline{s=-\sqrt{5}}$.