① (1) $\sqrt{n^2+7}=m$ （mは自然数）

$\Leftrightarrow$ $n^2+7=m^2$

$\Leftrightarrow$ $(m+n)(m-n)=7$

$m+n>m-7$ なので、 $(m+n,\ m-n)=(7,1)$

これを解いて、 $m=4,\ n=3$、 $\therefore\ \underline{n=3}$

(2) $\sqrt{n^2+7^2}=m$ （mは自然数）

$\Leftrightarrow$ $(m+n)(m-n)=7^2$

$m+n>m-n$ であることと、$m+n$と$m-n$の偶奇が一致することに

注意すると、上式を満たす $m+n$、$m-n$ の組み合わせは

$(m+n,\ m-n)=(49,1)$

$\therefore$ $(m,n)=(25,24)$ $\underline{n=24}$

(3) $\sqrt{n^2+7^k}=m$ （mは自然数）

$\Leftrightarrow$ $(m+n)(m-n)=7^k$

(2)と同じ点に注意する。

(i) kが偶数のとき（$k=2l$ とする）

$(m+n,\ m-n)=(7^k,1),(7^{k-1},7^1),\cdots(7^{l+1},7^{l-1})$

$m+n=7^{2l+p}$, $m-n=7^p$ とすると（$p=0,1,\cdots l-1$）

$2m=7^{2l+p}+7^p$

$m=\frac{1}{2}(7^{2l+p}+7^p)$, $n=\frac{1}{2}(7^{2l+p}-7^p)$

$(m,n)=\left(\frac{1}{2}(7^{k+p}+7^p),\ \frac{1}{2}(7^{k+p}-7^p)\right)$ $\left(p=0,1,\cdots\frac{k}{2}-1\right)$

(ii) kが奇数のとき（$k=2l+1$ とする）

$(m+n,\ m-n)=(7^{2l+1},1),(7^{2l},7^1),\cdots,(7^{l+1},7^l)$

$m+n=7^{2l+1-p}$, $m-n=7^p$ （$p=0,1,2,\dots l$）

$(m,n)=\left(\frac{1}{2}(7^{2l+1-p}+7^p),\ \frac{1}{2}(7^{2l+1-p}-7^p)\right)$

$=\left(\frac{1}{2}(7^{k-p}+7^p),\ \frac{1}{2}(7^{k-p}-7^p)\right)$ $\left(p=0,1,\cdots\frac{k-1}{2}\right)$

(i) (ii) より

$$\begin{cases} k\text{が偶数のとき} \\ \quad n = \dfrac{1}{2}(7^{k+p} - 7^{p}) \qquad \left(p = 0, 1, 2 \cdots \dfrac{k}{2} - 1\right) \\ k\text{が奇数のとき} \\ \quad n = \dfrac{1}{2}(7^{k+p} - 7^{p}) \qquad \left(p = 0, 1, 2 \cdots \dfrac{k-1}{2}\right) \end{cases}$$

② (1) 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-5)^2-2\cdot 2=\underline{21}$

(2) 判別式をDとすると

$D=u^2-4v$

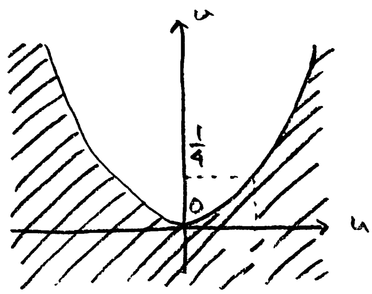
方程式が実数解をもつとき $D\geqq 0$ となるので、条件は

$u^2-4v\geqq 0$

$\Leftrightarrow\quad v\leqq \frac{1}{4}u^2$

(u,v)の存在範囲は右図

斜線部



(3) (a,b)が半径1の円の内部を動くことから

$a^2+b^2<1\quad\cdots①$

$a+b=X,\ ab=Y$ とすると、①は $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ となるので

$X^2-2Y<1$

$\Leftrightarrow\quad Y>\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}\quad\cdots②$

また、a,bが実数であることから a,bを解にもつ2次方程式

$t^2-(a+b)t+ab=0$

は実数解をもつが、これをX,Yで表すと

$t^2-Xt+Y=0$

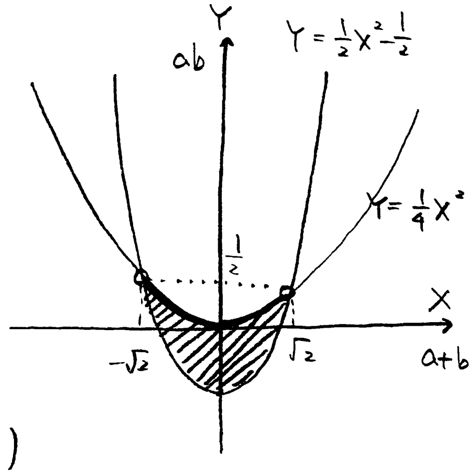
(2)より、その条件は

$Y\leqq\frac{1}{4}X^2\quad\cdots③$

②かつ③が$(a+b,ab)$の動ける領域

交点は $(X,Y)=(\pm\sqrt{2},\frac{1}{2})$ になるので

領域は右図斜線部(太線は含む。白丸は除く)

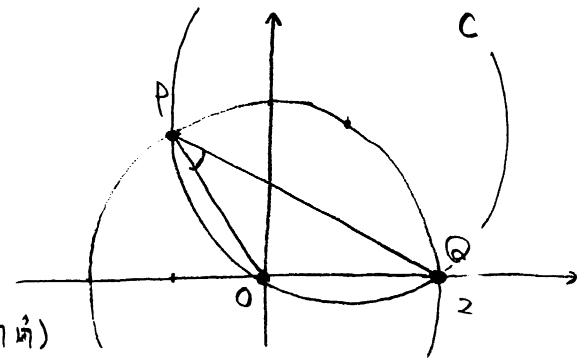


③ (1) $-1+\sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \underline{2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}$ //

(2) $OP = OQ = 2$ なので $\triangle OPQ$ は

二等辺三角形

$\angle OPQ = \frac{1}{2}(\pi - \angle POQ) = \underline{\frac{\pi}{6}}$ //



(3) Cの中心をAとする.

$\angle OAQ = 2\angle OPQ = \frac{\pi}{3}$

($\because$ $\angle OAQ$ は中心角, $\angle OPQ$ は円周角)

また $OA = QA$ (半径) なので $\triangle OAQ$ は

正三角形であり, $OA = OQ = 2$.

したがって A は $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1+\sqrt{3}i$

円は $|z-1-\sqrt{3}i| = 2$ と表せる.

これより $(z-1-\sqrt{3}i)(\bar{z}-1+\sqrt{3}i) = 2^2$

また z が純虚数のとき $z = -\bar{z}$ となるので, 上式と連立して

$z = 0,\ 2\sqrt{3}i$

$\therefore$ $R(2\sqrt{3}i)$

(4) 円Cは $|z-c| = 2$

条件より $w(z-c) = z-1$

$(w-1)z = wc-1$

ここで上式で $w=1$ とすると $c-1=0$ となるが, これは成り立たない

ので $w \neq 1$ である. したがって上式は

$$z = \frac{wc-1}{w-1}$$

と表すことができる. これを円の式に代入すると

$$\left|\frac{wc-1}{w-1} - c\right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{c-1}{w-1}\right| = 2$$

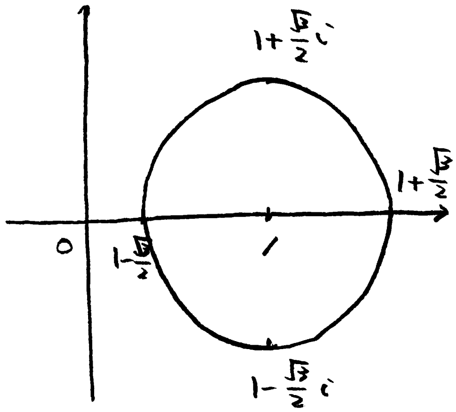
$$\Leftrightarrow |w-1| = \frac{1}{2}|c-1|$$

$c = 1+\sqrt{3}i$ を代入して

$$|w-1| = \frac{1}{2}|\sqrt{3}i| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって w のえがく図形は

右のようになる。



④ (1) $C(\alpha)$ を表す式に $y=x$ を代入

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha}+\frac{x^2}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

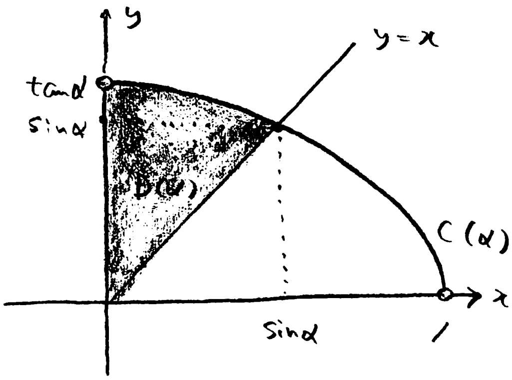
$$x^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\times\frac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\sin^2\alpha$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ のとき $\sin\alpha>0$ だから $x=\sin\alpha$.

$\therefore\ (x,y)=(\sin\alpha,\sin\alpha)$

(2) $C(\alpha)$ の式を $\cos^2\alpha$ 倍すると

$$x^2+\frac{y^2}{\tan^2\alpha}=1$$



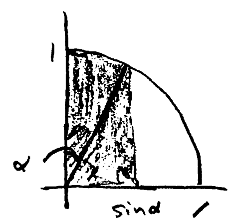
これはだ円の式を表しており、

その概形は右のようになる

したがって $S(\alpha)$ は

$$S(\alpha)=\int_0^{\sin\alpha}\sqrt{1-x^2}\tan\alpha\,dx-\frac{1}{2}(\sin\alpha)^2$$

$$=\tan\alpha\int_0^{\sin\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{1}{2}(\sin\alpha)^2$$



ここで $\int_0^{\sin\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$ について、$\sqrt{1-x^2}=y$ とすると、

$\int_0^{\sin\alpha}y\,dx$, $x^2+y^2=1\ (y>0)$ となり

これは右図の黒ぬり部の面積と等しく $\pi\times1^2\times\frac{\alpha}{2\pi}+\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha$

よって

$$S(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha\tan\alpha+\frac{1}{2}\sin^2\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

$$=\frac{\alpha}{2}\tan\alpha$$

(3) $$V(\alpha)=\int_0^{\sin\alpha}\pi(1-x^2)\tan^2\alpha\,dx-\pi(\sin\alpha)^2\times\sin\alpha\times\frac{1}{3}$$

$$=\pi\tan^2\alpha\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sin\alpha}-\frac{1}{3}\pi\sin^3\alpha$$

$$= \pi \tan^2\alpha \sin\alpha - \frac{1}{3}\pi \sin^3\alpha\,(1+\tan^2\alpha)$$

$$= \underline{\frac{2}{3}\cdot\pi \tan^2\alpha \sin\alpha}_{\text{//}}$$

(4) $$\frac{V(\alpha)^2}{S(\alpha)^3} = \frac{\frac{4}{9}\pi^2 \tan^4 \sin^2\alpha}{\frac{\alpha^3}{8}\tan^3\alpha}$$

$$= \frac{32}{9}\pi^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^3 \times \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\therefore \lim_{\alpha\to+0} \frac{V(\alpha)^2}{S(\alpha)^3} = \frac{32}{9}\pi^2$$