大阪医大2024前期

1

(1) (i) $n=1$ のとき　$a_1 = 2 \geqq 2$ だから成り立っている

(ii) $n=k$ のとき　$a_k \geqq 2$ が成り立つと仮定する.

このとき　$a_{k+1} = \dfrac{2a_k+5}{a_k+2} = 2 + \dfrac{1}{a_k+2} \geqq 2$ だから $n=k+1$ でも成り立つ

(i)(ii)より 数学的帰納法により全ての自然数 n について $a_n \geqq 2$ が成り立つ.

(2) $a_{n+1} - \sqrt{5} = \dfrac{2a_n+5}{a_n+2} - \sqrt{5} = \dfrac{2a_n+5-\sqrt{5}a_n-2\sqrt{5}}{a_n+2}$

$= \dfrac{a_n(2-\sqrt{5})+\sqrt{5}(2-\sqrt{5})}{a_n+2} = \left(\dfrac{2-\sqrt{5}}{a_n+2}\right)(a_n-\sqrt{5})$

ここで(1)より $a_n+2>0$. だから $\dfrac{2-\sqrt{5}}{a_n+2}$ は負の値となる. したがって $a_n-\sqrt{5}$ と $a_{n+1}-\sqrt{5}$ は異符号であり. 題意が成り立つことが示された.

(3) (2)より $|a_{n+1}-\sqrt{5}| = \left|\dfrac{\sqrt{5}-2}{a_n+2}\right||a_n-\sqrt{5}|$ …①

ここで $a_n \geqq 2$ だから $a_n+2 \geqq 4$ であり. $\dfrac{1}{a_n+2} \leqq \dfrac{1}{4}$ が成り立ち

$\left|\dfrac{\sqrt{5}-2}{a_n+2}\right| \leqq \dfrac{\sqrt{5}-2}{4}$ …②

①②より $|a_{n+1}-\sqrt{5}| \leqq \dfrac{\sqrt{5}-2}{4}|a_n-\sqrt{5}|$ が成り立つことが示された.

(4)

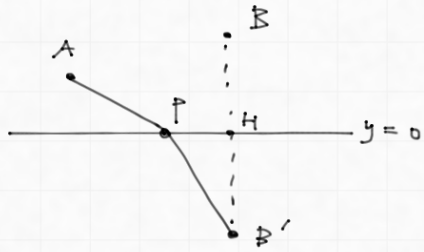
$0 \leqq |a_n-\sqrt{5}| \leqq \dfrac{\sqrt{5}-2}{4}|a_{n-1}-\sqrt{5}| \leqq \left(\dfrac{\sqrt{5}-2}{4}\right)^2|a_{n-2}-\sqrt{5}| \leqq \cdots \leqq \left(\dfrac{\sqrt{5}-2}{4}\right)^{n-1}|a_1-\sqrt{5}| = \left(\dfrac{\sqrt{5}-2}{4}\right)^{n-1}(\sqrt{5}-2)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\dfrac{\sqrt{5}-2}{4}\right)^{n-1}(\sqrt{5}-2)\right\} = 0$ だから. はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-\sqrt{5}| = 0$.

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{5}$

2

(1) A, Bはいずれも $y>0$ の領域にある



Bの $y=0$ についての対称点をB'とするとB'は$(1, -3, 4)$

Bから平面 $y=z$ に下ろした垂線の足をHとすると

$\triangle BPH \equiv \triangle B'PH$

より $BP = B'P$

よって $AP+BP = AP+B'P \leqq AB' = \sqrt{(1-2)^2+(-3-1)^2+(4-3)^2} = 3\sqrt{2}$

AP+BPの最小値は $\mathbf{3\sqrt{2}}$

A, B'を通る直線をlとすると

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{OA} + t\vec{AB'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t\text{は任意の実数})$$

lと平面 $y=0$ を連立

$1-4t=0$ より $t = \frac{1}{4}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 0 \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{P\left(\frac{7}{4}, 0, \frac{13}{4}\right)}$

(2) Aのxz平面に対する対称点をA'

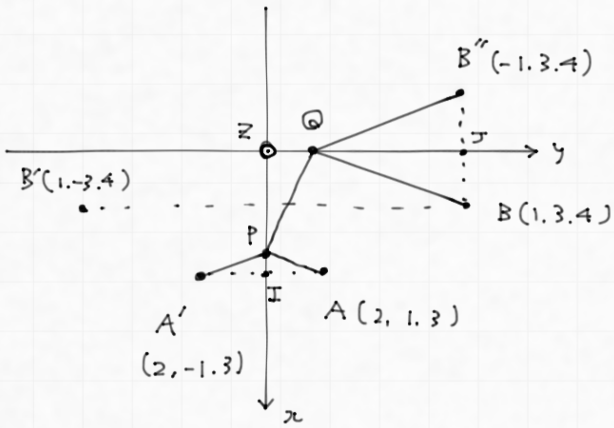
Bのyz平面に対する対称点をB''とする

AA'とxz平面の交点をIとして

$\triangle API \equiv \triangle A'PI$ だから $AP = A'P$

BB''とyz平面の交点をJとして

$\triangle BQJ \equiv \triangle B''QJ$ だから $BQ = B''Q$



よって $AP+PQ+BQ$

$= A'P+PQ+B''Q \leqq A'B'' = \sqrt{3^2+4^2+1^2} = \sqrt{26}$

AP+PQ+BQの最小値は $\mathbf{\sqrt{26}}$

A', B''を通る直線をmとして.

$$m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s\text{は任意の実数})$$

mとxz平面の交点は $y=0$ として $-1+4s=0$ $s = \frac{1}{4}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\mathbf{P\left(\frac{5}{4}, 0, \frac{13}{4}\right)}$

mとyz平面との交点は $x=0$ として $2-3s=0$ $s = \frac{2}{3}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\mathbf{Q\left(0, \frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)}$

3

(1) $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left\{\dfrac{e^{x-a}+e^{-x+a}}{2}+b-x\right\} = \lim_{x\to+\infty}\left\{e^{x}\left(\dfrac{e^{-a}}{2}-\dfrac{x}{e^{x}}\right)+\dfrac{e^{-x+a}}{2}+b\right\} = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} h(x)$ について $-x=t$ とすると

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{t\to+\infty} h(-t) = \lim_{t\to+\infty}\left\{\frac{e^{-t-a}+e^{t+a}}{2}+b+t\right\} = \lim_{t\to+\infty}\left\{e^{t}\left(\frac{e^{a}}{2}+\frac{t}{e^{t}}\right)+\frac{1}{2}e^{-t-a}+b\right\} = \infty$$

(2) $h'(x) = \dfrac{e^{x-a}-e^{-x+a}}{2}-1$

CとLが接するための条件は $h'(x)=0$ かつ $h(x)=0$ となるxが存在すること.

$h'(x)=0$ となるのは $e^{x-a}-e^{-x+a}=2 \iff e^{2x}-e^{2a}-2e^{x+a}=0$

$\iff (e^{x})^2-2e^{a}e^{x}-e^{2a}=0 \qquad \therefore\ e^{x}=e^{a}\pm\sqrt{e^{2a}+e^{2a}}=e^{a}\pm\sqrt{2}\,e^{a}$

$e^{x}>0$ だから $e^{x}=(1+\sqrt{2})e^{a}$ 　これを満たすxをαとおく

$h(\alpha)=\dfrac{1}{2}\left(e^{\alpha}e^{-a}+e^{-\alpha}e^{a}\right)+b-\alpha$

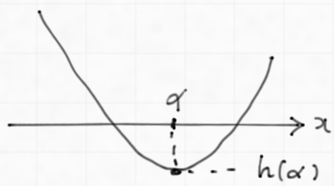
$=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})e^{a}\cdot e^{-a}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{e^{-a}}{(1+\sqrt{2})e^{a}}+b-\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}+b-\alpha=\sqrt{2}+b-\alpha=0$

$\iff b=\log\{(1+\sqrt{2})e^{a}\}-\sqrt{2}=a+\log(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}$

よって, CとLが接するための条件は　$\boldsymbol{b=a+\log(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}}$

(3) CとLが相異なる2点で交わるための条件は, $h(x)=0$が2つの異なる解をもつことで,

(1)より, そのための条件は, $h(x)$が負の極小値を1つもつことである



(2)より, そのための条件は　$\sqrt{2}+b-\alpha<0$

$\therefore\ \boldsymbol{b<a+\log(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}}$

4

(1) $\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき.

$x=r$, $y=\cos^2 r+\cos r+1$

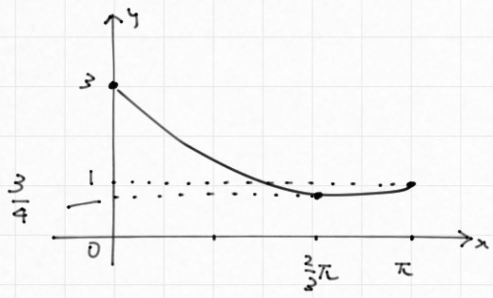
$y=\cos^2 x+\cos x+1$, $0\leqq x\leqq \pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dy}{dx}$	0	$-$	0	$+$	
y	3	↘	$\frac{3}{4}$	↗	1

$\frac{dy}{dx}=2\cos x(-\sin x)-\sin x=-\sin x(2\cos x+1)$

$\frac{dy}{dx}=0$ となるのは $x=0,\ \frac{2}{3}\pi$ で 増減は右のようになる

したがって P の軌跡は右のようになる



(2) r を消去すると

$y=\sin\theta\cdot\cos^2 x+\sin\theta\cos x+1$, $\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$

ここで x を固定し、θ を変化させる.

$y=(\cos^2 x+\cos x)\sin\theta+1$

$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき. $\cos x\geqq 0$ だから. $\cos^2 x+\cos x\geqq 0$

$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき. $\sin\theta$ は単調に増加し. $\frac{1}{2}\leqq\sin\theta\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって $\frac{1}{2}(\cos^2 x+\cos x)+1\leqq y\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 x+\cos x)+1$ …①

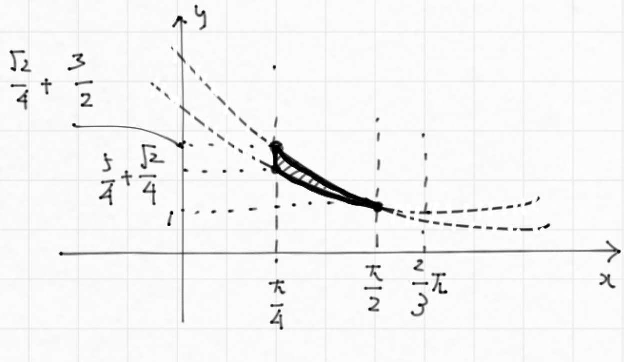
$\frac{1}{2}(\cos^2 x+\cos x)+1=\frac{1}{2}(\cos^2 x+\cos x+1)+\frac{1}{2}$ だから. (1) のグラフを y 方向に $\frac{1}{2}$ 倍し. y 方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動したグラフとなる

また $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 x+\cos x)+1=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 x+\cos x+1)+\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ だから (1) のグラフを y 方向に $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍し. y 方向に $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ だけ平行移動したものとなる.

x を動かすと y は ① を満たす領域となり.

P が動く範囲は右の斜線部の領域となる

(境界含む)



面積を S とすると

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 x+\cos x)+1-\frac{1}{2}(\cos^2 x+\cos x)-1\right\}dx=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}+\cos x\right)dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+0+1-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{16}\pi+\frac{3(\sqrt{2}-1)}{8}-\frac{2-\sqrt{2}}{4}=\mathbf{\frac{\sqrt{2}-1}{16}\pi+\frac{5\sqrt{2}-7}{8}}$$