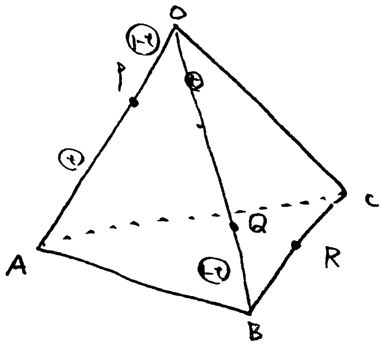
① $\overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = t\vec{b}$, $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$



(1) $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \underline{(1-t)\vec{a} - t\vec{b}}$

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - t\vec{b}$

$= \underline{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}}$

(2) OABCは正四面体だから、

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$,

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR} = \left\{(1-t)\vec{a} - t\vec{b}\right\}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right\}$

$= (1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-t)\times\frac{1}{2} - t\left(\frac{1}{2}-t\right)\times 1 - \frac{1}{2}t\times\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}(6t^2-7t+2) = \frac{1}{4}(2t-1)(3t-2)$

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR} = 0$を解くと $t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

$0 < t < 1$を満たすのは $\underline{t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}}$

(3) $t = \frac{1}{2}$のとき $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\vec{c}$

$|\overrightarrow{QP}| = \frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}| = \frac{1}{2}$, $|\overrightarrow{QR}| = \frac{1}{2}|\vec{c}| = \frac{1}{2}$

$\triangle PQR = \frac{1}{2}\times|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{QR}| = \frac{1}{8}$

$t = \frac{2}{3}$のとき $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{QR} = -\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

$|\overrightarrow{QP}|^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2|\vec{a}-2\vec{b}|^2 = \frac{1}{3}$, $|\overrightarrow{QR}|^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2|\vec{b}-3\vec{c}|^2 = \frac{7}{36}$

$\triangle PQR = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{7}{36}} = \frac{\sqrt{21}}{36}$

$\underline{\frac{1}{8}\text{, または }\frac{\sqrt{21}}{36}}$

② (1) $f(x)=\frac{1}{k}\left((k-1)x+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$

$f'(x)=\frac{1}{k}\left(k-1+(1-k)\frac{1}{x^k}\right)=\frac{k-1}{k}\left(1-\frac{1}{x^k}\right)$

$f'(x)=0$ となるのは $x=1$ のとき.

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{k-1}}=0$ だから $\lim_{x\to+\infty}\left\{f(x)-\frac{k-1}{k}x\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{kx^{k-1}}=0$

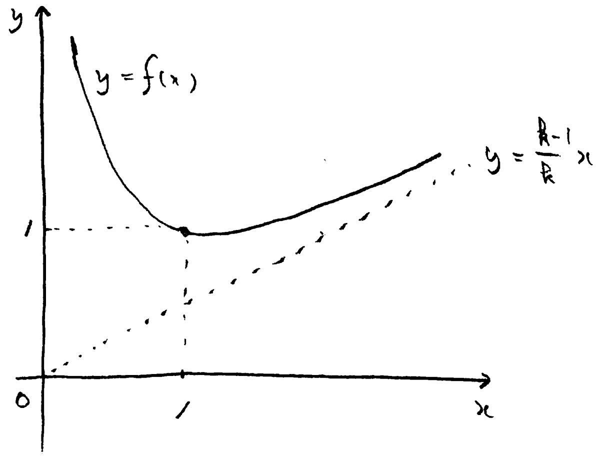
よって漸近線は $y=\frac{k-1}{k}x$

$\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty$, $f(1)=\frac{1}{k}(k-1+1)=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	↘	1	↗

$x>0$ における $f(x)$ の増減は右のとおり.

以上より $y=f(x)$ のグラフは下のようになる



(2) (i) $n=1$ のとき $x_1>1$

(ii) $n=k$ のとき $x_k>1$ とする. このとき (1) のグラフより $f(x_k)>f(1)=1$

(i)(ii) より 数学的帰納法によって全ての n について $x_n>1$ が示された.

(3) $\frac{k-1}{k}(x_n-1)-(x_{n+1}-1)=\frac{k-1}{k}x_n-f(x_n)-\frac{k-1}{k}+1$

$=\frac{k-1}{k}x_n-\frac{k-1}{k}x_n-\frac{1}{kx_n^{k-1}}+\frac{1}{k}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{x_n^{k-1}}\right)$

ここで (2) より $x_n>1$ だから上式は必ず正.

よって $\frac{k-1}{k}(x_n-1)>x_{n+1}-1$ が示された.

$0<x_n-1<\left(\frac{k-1}{k}\right)(x_{n-1}-1)<\left(\frac{k-1}{k}\right)^2(x_{n-2}-1)<\cdots<\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}(x_1-2)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}(x_1-2)=0$ だから,はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=0$ $\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=1$

③ (1) 2回目の目を b_1、3回目を b_2 としたとき

b_1+b_2 は右の表のようになる。

	b_2: 1	2	3	4	5	6
b_1: 1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$f(x)=x^2-ax+b$ とすると、

$f(1)=1-a+b=0$ となるとき $b=a-1$.

$a=1,2$ のとき b は存在しない

$a=3$ のとき $b=2$.　$\frac{1}{6}\times\frac{1}{36}$

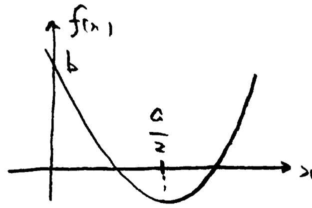
$a=4$ 〃 $b=3$　$\frac{1}{6}\times\frac{2}{36}$

$a=5$ 〃 $b=4$　$\frac{1}{6}\times\frac{3}{36}$

$a=6$ 〃 $b=5$　$\frac{1}{6}\times\frac{4}{36}$

よって $f(1)=0$ となる確率は　$\frac{1}{6}\times\frac{1}{36}(1+2+3+4)=\frac{5}{108}$

(2) $f(x)=(x-\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}$



$1\leqq a\leqq 6$ より、$f(x)$ のグラフの軸は $\frac{1}{2}\leqq a\leqq 3$.

また $f(0)=b>0$

よって $f(x)$ のグラフの概形は右のようになり、

$f(x)$ が x 軸と交わるとき その交点のうちの少なくとも

1つは　$0<x\leqq\frac{a}{2}\leqq 3$ の範囲にあり、かつ、もう一方の交点は $x\geqq\frac{a}{2}$ より

正の値をもつ。それらを順に α,β とすると $\alpha+\beta=a$ より、一方が整数ならば他方も整数

よって (*) が整数解をもつとすれば、いずれも正の整数であり、

少なくとも1つは1以上3以下である

(3) $x=2$ を解にもつとき、$f(2)=4-2a+b=0 \Leftrightarrow b=2a-4$

$a=3,\ b=2$.　$a=4,\ b=4$　$a=5,\ b=6$.　$a=6,\ b=8$

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{36}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{36}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{36}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{36}=\frac{7}{108}$

$x=3$ を解にもつとき　$f(3)=9-3a+b=0 \Leftrightarrow b=3a-9$

$a=4,\ b=3$　$a=5,\ b=6$　$a=6,\ b=9$

$\frac{1}{6}\times\frac{2}{36}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{36}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{36}=\frac{11}{216}$

$x=1, 2$ を解にもつとき、

$x^2-ax+b=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ だから

$a=3, b=2,$ $\qquad \frac{1}{6}\times\frac{1}{36}=\frac{1}{216}$

$x=1, 3$ を解にもつとき

$x^2-ax+b=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

$a=4, b=3,$ $\qquad \frac{1}{6}\times\frac{2}{36}=\frac{1}{108}$

$x=2, 3$ を解にもつとき、

$x^2-ax+b=(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$

$a=5, b=6$ $\qquad \frac{1}{6}\times\frac{5}{36}=\frac{5}{216}$

以上より

$$\frac{5}{108}+\frac{7}{108}+\frac{11}{216}-\frac{1}{216}-\frac{1}{108}-\frac{5}{216}=\frac{10+14+11-1-2-5}{216}=\frac{27}{216}=\underline{\frac{1}{8}}$$

④ (1) 条件より

$f(x) = (x-1)(x^2+ax+3)$ とおくことができる。このとき α, β は x^2+ax+3 の解だから、

$$\alpha = \frac{-a+\sqrt{12-a^2}\,i}{2}, \quad \beta = \frac{-a-\sqrt{12-a^2}\,i}{2} \ (=\bar{\alpha})$$

と表せる。

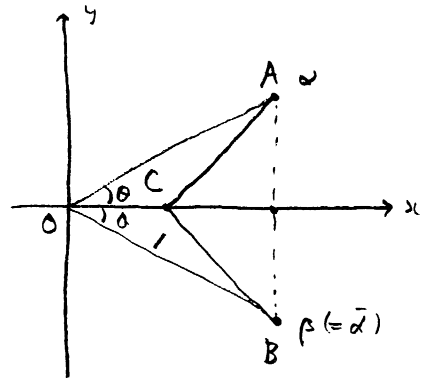
α の実部が1より大きいことから $\frac{-a}{2} > 1$. $a < -2$.

$|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha} = 3$. $\therefore \underline{|\alpha| = \sqrt{3}}$

(2) $\triangle OAB = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sin 2\theta = \frac{3}{2}\sin 2\theta$

$\triangle OAC = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$

$= \triangle OBC$



$S = \triangle OAB - \triangle OAC - \triangle OBC$

$= \frac{3}{2}\sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \times 2$

$= 3\sin\theta\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$

$= \underline{\sqrt{3}\sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta - 1)}$

(3) $\frac{dS}{d\theta} = \sqrt{3}\cos\theta(\sqrt{3}\cos\theta - 1) + \sqrt{3}\sin\theta(-\sqrt{3}\sin\theta)$

$= 3\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 3\sin^2\theta = 6\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 3$

$= (3\cos\theta + \sqrt{3})(2\cos\theta - \sqrt{3})$

α の実部が1より大きいことから、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

この範囲では $\cos\theta > 0$ だから $\frac{dS}{d\theta} = 0$ となるのは $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のときだけで $\theta = \frac{\pi}{6}$

Sの増減は次のようになる

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\theta}$	/	$+$	0	$-$	/
S	/	↗		↘	/

$\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき

$S = \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - 1\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

このとき $\alpha = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\alpha + \bar{\alpha} = 3$, $\alpha\bar{\alpha} = 3$ より. $x^2+ax+3 = x^2-3x+3$ $\therefore a = -3$

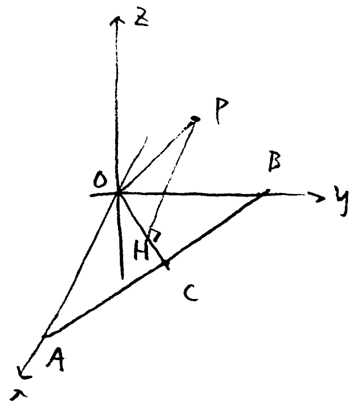
$\underline{f(x) = (x-1)(x^2-3x+3)}$

⑤ (1) $\vec{OH} = |\vec{OH}| \dfrac{\vec{OC}}{|\vec{OC}|}$

$= |\vec{OP}| \cos\angle POH \dfrac{\vec{OC}}{|\vec{OC}|}$

$= |\vec{OP}| \times \dfrac{\vec{OP}\cdot\vec{OC}}{|\vec{OP}||\vec{OC}|} \times \dfrac{\vec{OC}}{|\vec{OC}|} = \dfrac{\vec{OP}\cdot\vec{OC}}{|\vec{OC}|^2}\vec{OC}$

$= \dfrac{x+y}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$



$\underline{\vec{OH} = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}, 0\right)}$

$\underline{\vec{HP} = \vec{OP}-\vec{OH} = \left(\dfrac{x-y}{2}, \dfrac{y-x}{2}, z\right)}$

(2) HはOC上に存在しなければならないので $0 \le \dfrac{x+y}{2} \le 1 \Leftrightarrow 0\le x+y \le 2$

∠POHは45°以下だから $\cos\angle POH \ge \cos 45^\circ$

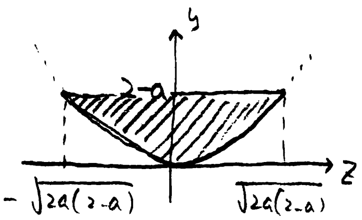
$\dfrac{|\vec{OH}|}{|\vec{OP}|} \ge \dfrac{1}{\sqrt2} \Leftrightarrow \dfrac{\frac{x+y}{2}\times\sqrt2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ge \dfrac1{\sqrt2} \Leftrightarrow x+y \ge \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$0\le x+y$ だから2乗して $x^2+y^2+2xy \ge x^2+y^2+z^2$

$\therefore 2xy \ge z^2$

(3) $x=a$ のとき(2)より $0\le a+y\le 2$, $\Leftrightarrow -a\le y\le 2-a$.

$2ay \ge z^2 \Leftrightarrow y \ge \dfrac{1}{2a}z^2$



$\dfrac{1}{2a}z^2 = 2-a \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{2a(2-a)}$

切り口は左図斜線部

$S(a) = \dfrac16\left(\dfrac1{2a}\right)\left(\sqrt{2a(2-a)}+\sqrt{2a(2-a)}\right)^3$

$= \dfrac{8}{12a}\times 2a(2-a)\sqrt{2a(2-a)}$

$= \dfrac43(2-a)\sqrt{2a(2-a)}$

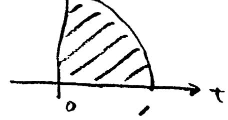
(4) $\displaystyle\int_1^2 S(a)\,da = \dfrac{4\sqrt2}{3}\int_1^2(2-a)\sqrt{1-(a-1)^2}\,da$ (= Vとする)

$a-1=t$ とすると

$V = \dfrac{4\sqrt2}{3}\displaystyle\int_0^1(1-t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \dfrac{4\sqrt2}{3}\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt - \dfrac{4\sqrt2}{3}\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt$

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$ は $\sqrt{1-t^2}=y$ とすれば、$y^2+t^2=1$, $y\ge0$ より

右図の面積をもとめることに等しく $\dfrac{\pi}{4}$



$$\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-t^2)'\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

よって $V = \frac{4\sqrt{2}}{3} \times \frac{\pi}{4} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi - \frac{4\sqrt{2}}{9}$