北海道大2021後期

1 (1) $f'(x) = 4x^3 + 18x^2 - 48x$

$f''(x) = 12x^2 + 36x - 48 = 12(x+4)(x-1)$

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f''(x) = 0$ となるのは $x = 1, -4$ で $f''(x)$ の符号は右のように変わる

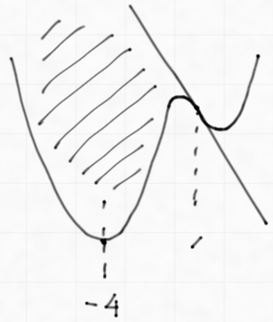
よって C の変曲点の x 座標は $x = 1, -4$ で $f(1) = -17$, $f(-4) = -512$ だから変曲点は次の2つ

$(x, y) = \mathbf{(1, -17), (-4, -512)}$

(2) P は $(1, -17)$ $f'(1) = 4 + 18 - 48 = -26$ だから P における C の接線 l は

$y = -26(x-1) - 17 \iff \mathbf{y = -26x + 9}$

(3) C と l の交点の x 座標は



$x^4 + 6x^3 - 24x^2 = -26x + 9$

$\iff (x-1)^3(x+9) = 0$ を解いて $x = 1, -9$

面積を S として

$$S = \int_{-9}^{1} \left\{-26x + 9 - (x^4 + 6x^3 - 24x^2)\right\} dx$$

$$= -\int_{-9}^{1} (x-1)^3(x+9)\, dx = -\int_{-9}^{1} \left\{(x-1)^4 + 10(x-1)^3\right\} dx$$

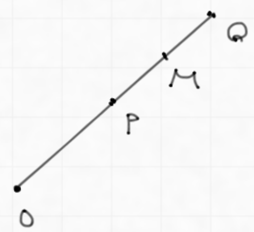
$$= -\left[\frac{1}{5}(x-1)^5 + \frac{5}{2}(x-1)^4\right]_{-9}^{1} = \frac{1}{5}(-10)^5 + \frac{5}{2}(-10)^4$$

$$= 10^4\left(-2 + \frac{5}{2}\right) = \mathbf{5000}$$

2

(1) $\overrightarrow{PQ} = \left(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta,\ \sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta\right)$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\tan\theta),\ \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \tan\theta)\right)$



(2) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2\cos\theta}\left(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta,\ \sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta\right) = \frac{1}{2\cos\theta}\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{OM} \parallel \overrightarrow{PQ}$ だから. O, P, Q (およびM)は 同一直線上にある

(3) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ だから $\frac{1}{2\cos\theta} > 0$ であり. P. Qは半直線OM上にあり.

Pは線分OQ上に存在する.

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$ だから $|\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{MQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}|$ であり. $|\overrightarrow{PQ}| = l$ とすると

(2)より $|\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2\cos\theta}|\overrightarrow{PQ}|$ だから

$|\overrightarrow{OP}| + |\overrightarrow{PM}| = \frac{1}{2\cos\theta} \times l$

$|\overrightarrow{PM}| + |\overrightarrow{PM}| = \frac{1}{2\cos\theta} \times l$

$2|\overrightarrow{PM}| = l = \frac{1}{2\cos\theta} \times l$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}$ であり $\theta = \frac{\pi}{3}$

3 $\boxed{1}$ $\boxed{2}\boxed{2}$ $\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}$ $\boxed{4}\boxed{4}\boxed{4}\boxed{4}$

(1) 1枚しか存在しない$\boxed{1}$のカードを10枚目に引くことになる. $P(A_{10})=\dfrac{1}{10}$

(2) 9枚目に$\boxed{1}$のカードを引くが. このとき. 最後に残るカードが$\boxed{2}$~$\boxed{4}$のいずれにせよ.

9枚目の$\boxed{1}$を引いたときに4つすべての番号が現れることになる.

つまり. 9枚目が$\boxed{1}$であれば条件を満たすことになる $P(A_9\cap B_1)=\dfrac{1}{10}$

(3) A_9が起こるのは(2)以外には $A_9\cap B_2$ のみで. このとき. 9.10枚目のカードはいずれも$\boxed{2}$

だから $P(A_9\cap B_2)=\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{45}$

もとめる条件付き確率 $P_{A_9}(B_1)=\dfrac{P(A_9\cap B_1)}{P(A_9)}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{45}}=\dfrac{9}{11}$

4

(1) (i) mが偶数のとき.

$m=2k$ (kは整数) とおけ. $m^2=(2k)^2=4k^2$ となるので m^2を4で割った余りは 0

(ii) mが奇数のとき.

$m=2k+1$ (kは整数) とおけ. $m^2=(2k+1)^2=4(k^2+k)+1$ となるので m^2を4で割った余りは 1

(i)(ii)より 整数mに対し, m^2を4で割った余りは 0または1である.

(2) $25\times 3^n=k^2+176$ を満たす自然数 n, k について. nが奇数だと仮定する.

$n=2l-1$ ($l=1,2,3,\dots$) と表すことができる.

このとき $25\times 3^n=25\times 3^{2l-1}=25\times 3^{2^{l-1}}\times 3^1=25\times 9^{l-1}\times 3$

ここで $9\equiv 1 \pmod 4$ だから $9^{l-1}\equiv 1^{l-1}\equiv 1 \pmod 4$ であり.

$$25\times 9^{l-1}\times 3\equiv 1\times 1^{l-1}\times 3\equiv 3 \pmod 4$$

となる. これに対し, (*)の右辺は

$$k^2+176\equiv k^2 \pmod 4$$

となり. (1)より $k^2\equiv 0$ または $1 \pmod 4$ なので. (*)の両辺を4で割った余りは一致しない.

よって (*)を満たす自然数 n, kについて nは奇数ではなく偶数である

(3) (2)より nは偶数.

$n=2l$ ($l=1,2,3\dots$) とおくと (*)は.

$$25\times 3^{2l}=k^2+176$$

$$176=(5\times 3^l)^2-k^2=(5\cdot 3^l+k)(5\cdot 3^l-k)$$

$176=2^4\times 11$ であり. $5\cdot 3^l+k$ と $5\cdot 3^l-k$ の偶奇が一致することおよび $5\cdot 3^l+k>5\cdot 3^l-k$ に留意して

$(5\cdot 3^l+k,\ 5\cdot 3^l-k)=(22,\ 2^3),\ (44,\ 2^2),\ (88,\ 2)$

が考えられる. これらを順に解くと.

(i) $(22,\ 2^3)$のとき. $k=7$, $l=1$

(ii) $(44,\ 2^2)$のとき $k=20$, $5\cdot 3^l=24$ … 不適

(iii) $(88,\ 2)$のとき. $k=43$ $5\cdot 3^l=45$ $l=2$

以上より. (*)を満たすのは $(k,l)=(7,1),(43,2)$

$\therefore$ **$(n,k)=(2,7),(4,43)$**