①

(1) (i) $n=0$ のとき

$$I_0(x)=\int_0^x e^t\,dt = e^x-1$$

したがって $f_0(x)=1$　$a_0=-1$ とすれば、命題は成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき.

$I_k(x)=f_k(x)e^x+a_k$ と表すことができると仮定する.

(ここで $f_k(x)$ は x の k次式とする)

このとき

$$
\begin{aligned}
I_{k+1}(x) &= \int_0^x t^{k+1}e^t\,dt \\
&= \left[t^{k+1}e^t\right]_0^x-(k+1)\int_0^x t^k e^t\,dt \\
&= x^{k+1}e^x-(k+1)\{f_k(x)e^x+a_k\} \\
&= (x^{k+1}-(k+1)f_k(x))e^x-(k+1)a_k
\end{aligned}
$$

ここで $f_k(x)$ は k次式だから. $x^{k+1}-(k+1)f_k(x)$ は $k+1$ 次式.

したがって. $x^{k+1}-(k+1)f_k(x)=f_{k+1}(x)$, $-(k+1)a_k=a_{k+1}$ とすることで命題は成立する.

(i)(ii) より数学的帰納法により題意は示された.

(2) (1)より $a_{n+1}=-(n+1)a_n$

両辺を $(n+1)!(-1)^{n+1}$ で割る.

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!(-1)^{n+1}}=\frac{a_n}{n!(-1)^n}$$

これより $$\frac{a_n}{n!(-1)^n}=\frac{a_{n-1}}{(n-1)!(-1)^{n-1}}=\cdots=\frac{a_1}{1!(-1)^1}=\frac{a_0}{0!(-1)^0}=-1$$

$$\therefore\ \underline{a_n=(-1)^{n-1}n!}$$

(3) (1) より $f_{n+1}(x) = x^{n+1} - (n+1)f_n(x)$

両辺を $(n+1)!$ で割ると、

$$\frac{f_{n+1}(x)}{(n+1)!} + \frac{f_n(x)}{n!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \cdots ①$$

ここで

$$S_n(x) + S_{n-1}(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i(x)}{i!} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_i(x)}{i!}$$

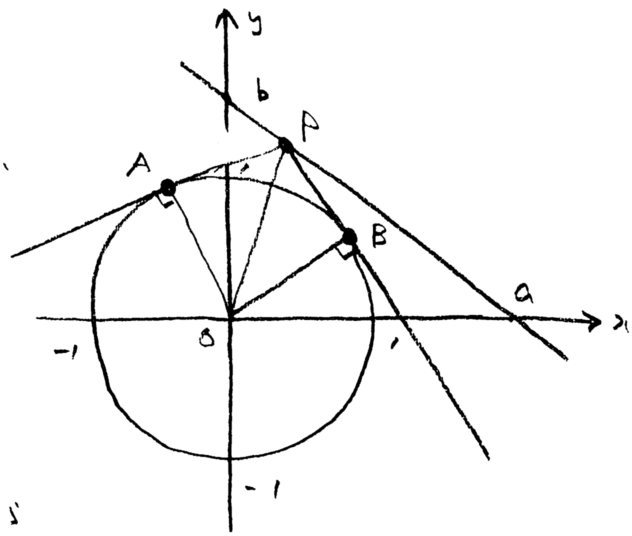
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{f_{i+1}(x)}{(i+1)!} + \frac{f_i(x)}{i!} \right\} + \frac{f_0(x)}{0!}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} + 1 \qquad (\because ①)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i!} + 1 = \underline{\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}}$$

②

(1) lは (b, a)を法線ベクトルとし、
$(a, 0)$を通る直線なので



$l:\ b(x-a)+ay=0$

$\Leftrightarrow\ bx+ay-ab=0$

lと円が交わらないための必要十分条件は、円の中心からlまでの距離が円の半径の1より長いことである。

$$\frac{|b\times 0+a\times 0-ab|}{\sqrt{b^2+a^2}}>1$$

$$|ab|>\sqrt{a^2+b^2}$$

両辺とも正なので2乗して

$$a^2b^2>a^2+b^2$$

(2) $PO=d$とすると、$\triangle OAP$について、$\angle OAP=90°$、$OA=1$だから

$$AP=\sqrt{d^2-1}$$

したがってPAOBの面積は、

$$S=\frac{1}{2}\times OA\times AP\times 2=\sqrt{d^2-1}$$

よってdが最小となるとき、Sは最小となる。

またdが最小となるのは、Oからlに下ろした垂線の足がPと一致するときであるから最短距離をd_0として

$$\overrightarrow{OP}=d_0\times\frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}=\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}\times\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$$

$$=\frac{ab}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$$

このとき $S=\sqrt{\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}-1}=\sqrt{\dfrac{a^2b^2-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$、 $P\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\ \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$

③ $a^{p-1}-1=p^k$

$\Leftrightarrow \quad (a-1)(a^{p-2}+a^{p-3}+\cdots+a+1)=p^k \quad \cdots (*)$

これより、$a-1$がpのみを素因数にもつか、$a-1=1$

(i) $a-1$がpのみを素因数にもつとき

このとき $a-1\equiv 0 \pmod{p}$ （以下 mod pは省略する）

よって $a\equiv 1$.

したがって

$$a^{p-2}+a^{p-3}+\cdots+a+1 \equiv 1^{p-2}+1^{p-3}+\cdots+1+1$$
$$= p-1$$

となるが、$(*)$の左辺は p以外の素因数を持たないので、これを満たすpは存在しない。

したがって $a-1\equiv 0$のときは、$(*)$は成立しない。

(ii) $a-1=1$ すなわち、$a=2$のとき

条件は $2^{p-1}-1=p^k$

となる。

pは3以上の素数だから、$p-1=2q$とおくことができる。

これを代入すると

$$2^{2q}-1=p^k$$
$$(2^q+1)(2^q-1)=p^k$$

ここで $(2^q+1)-(2^q-1)=2$となるが、2^q+1も2^q-1もpのみを因数にもつ数であり、したがって $2^q+1=p^l$, $2^q-1=p^m$と表すことができ、$(l>m)$

$$2^q+1-(2^q-1)=p^l-p^m \geqq p^1-p^0=p-1 \geqq 3-1=2.$$

∴ 等号は $p=3$, $k=1$, $a=2$ のときのみ成り立つ。

以上、(i)(ii)より、$a^{p-1}-1=p^k$は $a=2$, $p=3$のときのみ成立することが示された。

④

(1) $z^n = \left\{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right\}^n$

$= \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1.$

$\Leftrightarrow \quad z^n - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1) = 0.$

ここで $z = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \neq 1$ だから 両辺を$z-1$で割ると

$\underline{z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0.}$

(2) (1)より $z^{n-1} = -1 - z - z^2 - \cdots - z^{n-2}$ を w の式に代入

$w = \left(a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-2} z^{n-2} - (1 + z + \cdots + z^{n-2})a_{n-1}\right)^n$

$= \left\{(a_0 - a_{n-1}) + (a_1 - a_{n-1})z + (a_2 - a_{n-1})z^2 + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1})z^{n-2}\right\}^n$

ここで $1 \leqq a_{n-1} \leqq n$ だから $a_{n-1} = 1$ とすると

$w = \left\{(a_0 - 1) + (a_1 - 1)z + (a_2 - 1)z^2 + \cdots + (a_{n-2} - 1)z^{n+1}\right]^n$

となるが このとき $a_0 - 1,\ a_1 - 1,\ a_2 - 1,\ \ldots\ a_{n-2} - 1$ は

$0, 1, \cdots n-1$ までの整数値をとることができる. すなわち

$a_0 - 1 = b_0,\ a_1 - 1 = b_1,\ \ldots\ a_{n-2} - 1 = b_{n-2}$ とすることができ、

これは w が S の要素に必ず含まれていることを示している.

$\therefore \quad S \supset T$

次に $S \subset T$ を示す

$a_0 \sim a_{n-1}$ のうち、最小のものを a_m とする.

(1)より $a_m(1 + z + z^2 + \cdots + z^m + \cdots + z^{n-1}) = 0$ だから w は

$w = \left\{(a_0 - a_m) + (a_1 - a_m)z + \cdots + (a_{m-1} - a_m)z^{m-1} + (a_{m+1} - a_m)z^{m+1} + \cdots + (a_n - a_m)z^{n-1}\right\}^n$

$z^n = 1$ なので $(z^n)^{n-m-1}$ をかけて、

$$v = (z^n)^{n-m-1}\left\{(a_0-a_m)+(a_1-a_m)z+\cdots+(a_{m-1}-a_m)z^{m-1}+(a_{m+1}-a_m)z^{m+1}+\cdots+(a_n-a_m)z^{n-1}\right\}^n$$

$$=\left\{(a_0-a_m)z^{n-m-1}+(a_1-a_m)z^{n-m}+\cdots+(a_{m-1}-a_m)z^{n-2}+(a_{m+1}-a_m)z^{n}+\cdots+(a_n-a_m)^{2n-2-m}\right\}^n$$

$$=\left\{(a_{m+1}-a_m)+(a_{m+2}-a_m)z+\cdots+(a_n-a_m)z^{n-m-2}+(a_0-a_m)z^{n-m-1}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(a_{m-1}-a_m)z^{n-2}\right\}^n \quad \cdots(*)$$

ここで a_m は $a_1 \sim a_n$ の中で最小の値なので、

$0 \leqq a_{m+1}-a_m \leqq n-1$, $0 \leqq a_{m+2}-a_m \leqq n-1$, …, $0 \leqq a_n-a_m \leqq n-1$

であり、これは $(*)$ が T の要素であることを示している。

よって $S \subset T$.

以上より $S = T$ であることが示された。 証明終