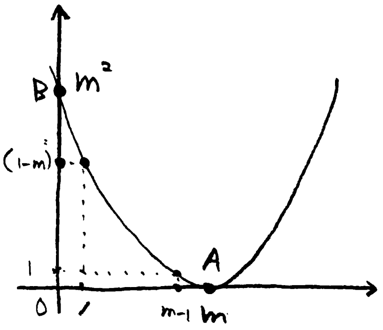
1 (1) $y=(x-m)^2$



$(0,0)$, $(m,0)$, $(0,m^2)$ を O, A, B と おく

線分OA上(除く両端、以下同じ)に

$(1,0), (2,0) \cdots (m-1,0)$ の $m-1$ コ

OB上に $(0,1) \cdots (0,m^2-1)$ の m^2-1 コ

曲線AB $(1,(m-1)^2), (2,(m-2)^2), \cdots (m-1,1)$ の $m-1$コ

O, A, Bの分を含めて $m-1+m^2-1+m-1+3 = m^2+2m$

(2) Dの内部および周上の点について

$x=k$のとき $(k,0), (k,1) \cdots (k,(k-m)^2)$ の $(k-m)^2+1$コ

の格子点があるので

$$T_m = \sum_{k=0}^{m}(k^2-2mk+m^2+1) = \sum_{k=0}^{m}k^2 - \sum_{k=0}^{m}(2mk-m^2-1)$$

$$= \frac{m}{6}(m+1)(2m+1) - \frac{-m^2-1+m^2-1}{2} \times (m+1) = \underline{\frac{1}{6}(m+1)(2m^2+m+6)}$$

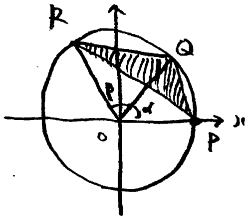
(3) $S_m = \int_0^m (x-m)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x-m)^3\right]_0^m = \frac{1}{3}m^3$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{T_m}{S_m} = \lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{6}(m+1)(2m^2+m+6)}{\frac{1}{3}m^3}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(2+\frac{1}{m}+\frac{6}{m^2}\right) = \frac{1}{2}\times1\times2 = \underline{1}$$

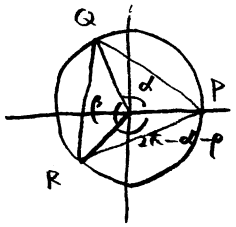
2 (1) Pを(1,0)としても一般性を失わないので Pを(1,0)として考える

(i) $\alpha+\beta \leqq \pi$ のとき



$$\triangle PQR = \triangle POQ + \triangle QOR - \triangle POR$$
$$= \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\beta - \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$$

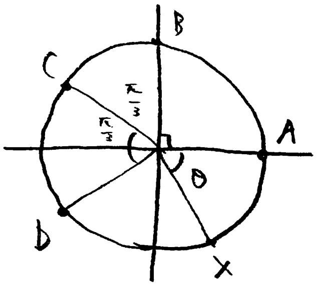
(ii) $\pi < \alpha+\beta < 2\pi$ のとき



$$\triangle PQR = \triangle POQ + \triangle QOR + \triangle ROQ$$
$$= \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\beta + \frac{1}{2}\sin(2\pi-\alpha-\beta)$$
$$= \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\beta - \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$$

(i)(ii)より $\triangle PQR$の面積は $\frac{1}{2}\{\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta)\}$ と表すことができる

(2) Aを(1,0)として考える



$\angle AOX = \theta$とおく

XはDとAの間にあるので $0 < \theta < 2\pi - \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

$\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, $0 < \theta < \frac{5}{6}\pi < \pi$なので(1)より

$$\triangle XAB = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta$$

$\angle XOD = \frac{5}{6}\pi - \theta < \pi$ だから $\triangle XCD$について

(1)より

$$\triangle XCD = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5}{6}\pi-\theta\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{7}{6}\pi-\theta\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\cos\theta$$

よって $\triangle XOD + \triangle XCD = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\sin\theta$

となるので $\theta = \frac{\pi}{2}$のとき最大となり $1+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

最大値は$1+\frac{\sqrt{3}}{4}$. このとき$\angle XOA = \frac{\pi}{2}$

3 (1) 1回目にひっくり返した列を、もう1度ひっくり返して戻す他ない。

$1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

(2) 1回でひっくり返せるのは3枚、全てを白にするためには9枚の板を全てひっくり返さなければならないので、3回とも黒3つを白3つに変えるしかない。

つまり、1,2,3 の3つの目または、4,5,6の3つの目が出る他にない

1,2,3の目が出るのは $\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

4,5,6 〃 $\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

あわせて $\frac{1}{18}$

(3) 2の目が何回でるかで場合分けする

(i) 4回でる… 全て黒に戻るので不可

(ii) 3回でる… 中央の板が黒にならなければならないので、あと1つは5の目がでなければならない。このとき、条件を満たすので $\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1\times{}_4C_1=\frac{4}{6^4}$

(iii) 2回でる… あと残りの2回では題意の模様にはならない(2の目は使えないので)

(iv) 1回でる… 中央の板を黒に戻すには5の目が1、または3回でなければいけない

① 3回のとき $\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^3\times{}_4C_1=\frac{4}{6^4}$

② 1回のとき 他の2回は、(1)のときのように同じ目でなければならない

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{4}{6}\times\frac{1}{6}\right)\times\frac{4!}{2!}=\frac{4\times12}{6^4}=\frac{48}{6^4}$

(v) 0回でる … 中央の板が黒だから5の目は4,2,0回のいずれか

4,2回のとき、(i)(iii)と同様で不可

0回のとき、1,3,4,6の目が1回ずつ出れば題意の模様になる

$\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{24}{6^4}$

以上まとめて

$\frac{4}{6^4}+\frac{4}{6^4}+\frac{48}{6^4}+\frac{24}{6^4}=\frac{80}{6^4}=\frac{5}{81}$

4 (1) $a_1=0$, $a_2=\frac{1}{2}\sqrt{|0+1|}-1=-\frac{1}{2}$, $a_3=a_2^2+2a_2=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$

$a_4=\frac{1}{2}\sqrt{|-\frac{3}{4}+1|}-1=-\frac{3}{4}$, $a_5=(-\frac{3}{4})^2+2(-\frac{3}{4})=-\frac{15}{16}$

$a_6=\frac{1}{2}\sqrt{|-\frac{15}{16}+1|}-1=\frac{1}{8}-1=-\frac{7}{8}$, $a_7=(-\frac{7}{8})^2+2(-\frac{7}{8})=\frac{49}{64}-\frac{14}{8}=-\frac{63}{64}$

これらより $a_{2n+1}=-\frac{4^n-1}{4^n}$ と推測できるのでこれを数学的帰納法により証明する

(i) $n=0$ のとき $a_1=-\frac{4^0-1}{4^0}=0$. 成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき. $a_{2k+1}=-\frac{4^k-1}{4^k}$ が成り立つと仮定する.

このとき $a_{2k+2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|-\frac{4^k-1}{4^k}+1\right|}-1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4^k}}-1=\frac{1}{2^{k+1}}-1$

$a_{2k+3}=a_{2k+2}^2+2a_{2k+2}=\left(\frac{1}{2^{k+1}}-1\right)^2+2\left(\frac{1}{2^{k+1}}-1\right)$

$=\frac{1}{4^{k+1}}-\frac{1}{2^k}+1+\frac{1}{2^k}-2=\frac{1}{4^{k+1}}-1=-\frac{4^{k+1}-1}{4^{k+1}}$

よって仮定の下で $n=k+1$ のときも推測は成り立っている

(i)(ii) より. 数学的帰納法により推測が正しいことが示された.

よって $a_{2n+1}=-\frac{4^n-1}{4^n}$ $(n=0,1,2\dots)$

$2n+1=m$ とおきかえて.

$a_m=-\frac{4^{\frac{m-1}{2}}-1}{4^{\frac{m-1}{2}}}=-\frac{2^{m-1}-1}{2^{m-1}}=\frac{1-2^{m-1}}{2^{m-1}}$ $(m=1,3,5,\dots)$

$\therefore$ n が奇数のとき $a_n=\frac{1-2^{n-1}}{2^{n-1}}$ $(n=1,3,5\dots)$

(2) $a_{2m}=\frac{1}{2}\sqrt{|a_{2m-1}+1|}-1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-4^{m-1}}{4^{m-1}}+1}-1$ $(\because (1))$

$=\frac{1}{2^m}-1$ $(m=1,2,3\dots)$

$2m=n$ として $a_n=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}-1$ $(n=2,4,6\dots)$

(3) $n=2m$ のとき $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{m\to\infty}a_{2m}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2^m}-1\right)=-1$

$n=2m+1$ のとき $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{m\to\infty}a_{2m+1}=\lim_{m\to\infty}\left(-\frac{4^m-1}{4^m}\right)=-1$

よって $\lim_{n\to\infty}a_n=-1$

5 (1) Aを始点とし、$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする.

ABCDは1辺の長さ1の正四面体だから、$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$.

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

$$\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}(-\overrightarrow{AO}+\vec{b}-\overrightarrow{AO}+\vec{c}-\overrightarrow{AO}+\vec{d}-\overrightarrow{AO})$$

$$\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

$$|\overrightarrow{GA}|^2=\frac{1}{16}\left(|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{d}+2\vec{d}\cdot\vec{a}\right)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{GA}|=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{AG}\cdot(\vec{b}-\overrightarrow{AG})=|\overrightarrow{AG}|^2-\frac{1}{4}\vec{b}\cdot(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$$

(2) ($\overrightarrow{AP}=k\vec{b}+l\vec{c}+m\vec{d}$ とおく. Pは正四面体の内部および表面にあるので
$0\leqq k\leqq1,\ 0\leqq l\leqq1,\ 0\leqq m\leqq1,\ k+l+m\leqq1$.)

不要でした…

$$L=|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{AP}-\vec{b}|^2+|\overrightarrow{AP}-\vec{c}|^2+|\overrightarrow{AP}-\vec{d}|^2$$

$$=4|\overrightarrow{AP}|^2-2(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot\overrightarrow{AP}+3$$

$$=4\left\{|\overrightarrow{AP}|^2-\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{2}\cdot\overrightarrow{AP}\right\}+3$$

$$=4\left\{|\overrightarrow{AP}|^2-2\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AP}\right\}+3$$

$$=4|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AG}|^2+3-4|\overrightarrow{AG}|^2$$

$$=4|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AG}|^2+\frac{3}{2}=4|\overrightarrow{GP}|^2+\frac{3}{2}$$

対称性より GはABCDの重心であり, $|\overrightarrow{PG}|$が最大となるのはPが A, B, C, D のいずれかの頂点になったときで $|\overrightarrow{PG}|\leqq|\overrightarrow{AG}|=\frac{\sqrt{6}}{4}$

よって $L\leqq4\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+\frac{3}{2}=3$.

また P=G のとき Lは最小で $L\geqq4\times0^2+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

Lの最大値は3, 最小値は$\frac{3}{2}$

6 (1) $\int_1^{\sqrt{e}} x(\log x)^n dx$ について　$\log x = t$ とおくと

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$，　$\begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & \sqrt{e} \\ \hline t & 0 & \to & \frac{1}{2} \end{array}$　，$x = e^t$

$$\int_1^{\sqrt{e}} x(\log x)^n dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^t \cdot t^n e^t dt = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2t} t^n dt.$$

ここで e^x は単調に増加するので　$0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ として．

$$e^0 \leqq e^{2t} \leqq e^1$$

$$t^n \leqq e^{2t} t^n \leqq e t^n$$

この不等式を $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ の区間で積分

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2t} \cdot t^n dt \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} e t^n dt$$

$$\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} \leqq \int_1^{\sqrt{e}} x(\log x)^n dx \leqq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} e\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqq a_n \leqq \frac{e}{2(n+1)}$$

証明終

(2) (1)より

$$a_n = 2^n \int_0^{\frac{1}{2}} t^n e^{2t} dt = 2^n \left\{\left[\frac{1}{2} e^{2t} t^n\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2t} \times n t^{n-1} dt\right\}$$

$$= 2^n \left\{\frac{1}{2^{n+1}} e - \frac{1}{2} n \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2t} t^{n-1} dt\right\}$$

ここで (1) より $a_{n-1} = 2^{n-1} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2t} t^{n-1} dt$ だから

$$a_n = \frac{1}{2} e - n\, 2^{n-1} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2t} t^{n-1} dt = \frac{1}{2} e - n a_{n-1}$$

$a_n = p_n e + q_n$，$a_{n-1} = p_{n-1} e + q_{n-1}$ を代入．

$$p_n e + q_n = \frac{1}{2} e - n p_{n-1} e - n q_{n-1}$$

p_n，p_{n-1}，q_n，q_{n-1} は全て有理数で，e は無理数だから．上式が成り立つ条件は

$\underline{p_n = \frac{1}{2} - n p_{n-1}}$　かつ　$\underline{q_n = -n q_{n-1}}$

(3) $q_n = -n q_{n-1} = (-n)(-n+1) q_{n-2} = \cdots = (-1)^{n-1} n!\, q_1$

$a_1 = 2^1 \int_1^{\sqrt{e}} x \log x\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2t} t\, dt = 2\left[\frac{1}{2} e^{2t} t\right]_0^{\frac{1}{2}} - 2 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2t} dt$

$= \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\left[e^{2t}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad = p_1 e + q_1$

$\therefore p_1 = 0,\ q_1 = \frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{e}{2(n+1)} = 0$ および (1) より $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (はさみうち)

以上より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n p_n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{a_n - q_n}{e}\right)}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{(-1)^n a_n}{n! \cdot e} - \frac{(-1)^n(-1)^{n-1}\cancel{n!} \times \frac{1}{2}}{\cancel{n!}\, e} \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{(-1)^n a_n}{n!} \cdot \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} \right\}$$

$$= \frac{1}{2e}$$