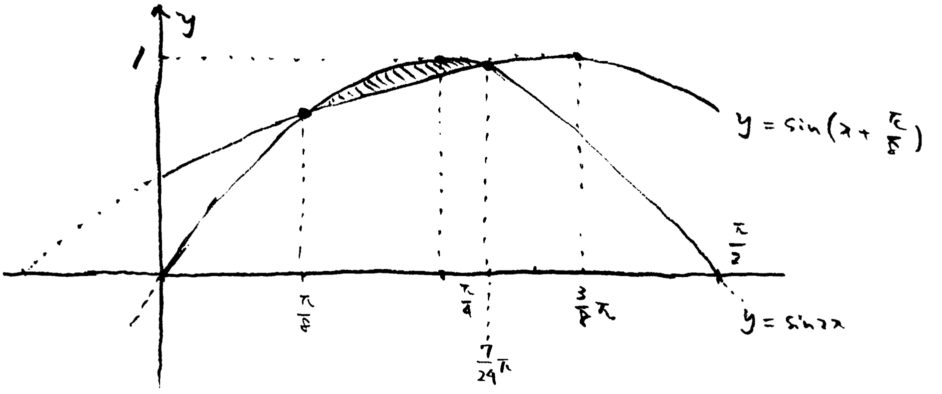
①　$\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sin 2x$ となるのは

$$x+\frac{\pi}{8}=2x+2n\pi,\quad \pi-2x+2n\pi \quad (n\text{は整数})$$

$$x=\frac{\pi}{8}-2n\pi,\quad \frac{7}{24}\pi+\frac{2}{3}n\pi$$

このうち $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲内にあるのは $x=\frac{\pi}{8},\ \frac{7}{24}\pi$

したがって 2つの関数および回転領域は下のようになる



もとめる体積をVとすると

$$V=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\pi\sin^2 2x-\pi\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)dx$$

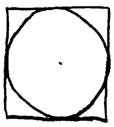
$$=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\cancel{1}-\cos 4x-\cancel{1}+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\ dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}\pi$$

$\therefore\ \underline{\frac{1}{16}\pi}$

② (i) 全ての内角が90°のとき



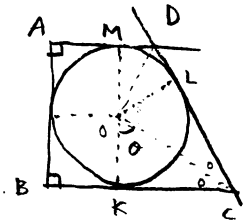
四角形は1辺の長さが2の正方形となるので

面積は4.

(ii) 3つの内角が90°のとき

残り1つの内角も90°となってしまうので存在しない.

(iii) 2つの内角が90°のとき



(Oは中心)

(a) 隣りあう2つの内角が90°となるとき

四角形をABCDとして右図のように各点を定めることができる. $\angle COK=\theta$ とおくと, $KC = OK\tan\theta = \tan\theta$

$$\angle DOM = \frac{\pi-2\theta}{2} = \frac{\pi}{2}-\theta$$

$$DM = OM\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\triangle OKC = \frac{1}{2}\times OK\times KC = \frac{1}{2}\tan\theta. \qquad \triangle OMD = \frac{1}{2}\times OM\times MD = \frac{1}{2\tan\theta}$$

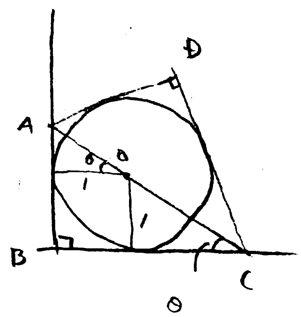
ABCDの面積Sは

$$S = ABKM + \triangle OKC\times 2 + \triangle OMD\times 2 = 2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta} \geqq 2+2\sqrt{\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}} = 4$$

等号は $\tan\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ より $\tan\theta=1$ のときだが, これは $\theta=45°$ となり,

ABCDが正方形となってしまう. $\therefore\ S>4$.

(b) 向かいあう2つの内角が90°のとき



(a)と同様に右のようにABCDを定める

$\triangle ABC$, $\triangle ADC$において, $\angle BAC=\angle DAC$

$\angle ABC=\angle ADC$, AC共通だから $\triangle ABC\equiv\triangle ADC$.

$\angle ACB=\theta$ として,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}BC\times AB = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\tan\theta}\right)\times(1+\tan\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+1+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right) = 1+\frac{1}{2}\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right) \geqq 1+\frac{1}{2}\times 2 = 2.$$

等号は $\tan\theta=\frac{1}{\tan\theta}$ だから $\theta=45°$ となり, $\angle BCD\neq 90°$ に反するので成立しない

よって $\triangle ABC>2$. すなわち ABCDの面積をSとして $S>4$

(i)~(iii)より 四角形が正方形となったとき最小で そのときの面積は4.

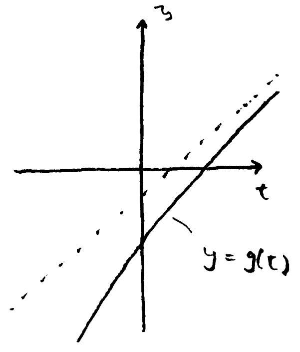
③ (1) $e^x+1=f(x)$ とおく.

$f'(x)=e^x$.

接点を $(t, f(t))$ とする接線は $y=e^t(x-t)+f(t)$ だから. $y=e^tx-te^t+e^t+1$

このうち $(a,0)$ を通るのは $0=ae^t-te^t+e^t+1$

$e^t\neq0$ だから、上式は $a=\dfrac{te^t-e^t-1}{e^t}=t-1-\dfrac{1}{e^t}$



ここで上式右辺を $g(t)$ とおく. $(g(t)=t-1-e^{-t})$

$g'(t)=1+e^{-t}>1$ だから. $g(t)$ は単調に増加する

また $\lim_{t\to\infty} g(t)=\infty$, $\lim_{t\to-\infty} g(t)=-\infty$ であり.

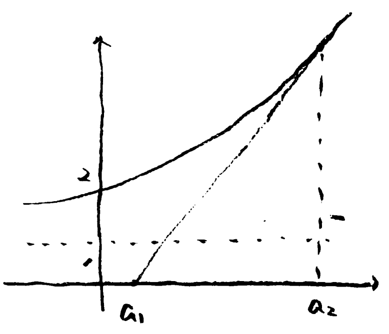
$y=g(t)$ のグラフは右のようになる

このとき $y=g(t)$ と $y=a$ のグラフは常に1つの

交点をもつ. それは. $g(t)=a$ が常に1つの解をもつことを意味する.

よって. $y=f(x)$ の接線で $(a,0)$ を通るものはただ1つ存在する.

(2) (1)より. a_{n+1} は.



$a_n=t-1-\dfrac{1}{e^t}$

の解だから.

$a_n=a_{n+1}-1-\dfrac{1}{e^{a_{n+1}}}$

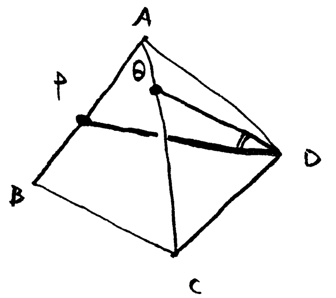
$a_{n+1}=a_n+1+\dfrac{1}{e^{a_{n+1}}}>a_n+1>a_{n-1}+1+1$

$>a_{n-2}+3>\cdots>a_1+n$

$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$. となり $\dfrac{1}{e^{a_{n+1}}}\to0$.

また $a_{n+1}-a_n=1+\dfrac{1}{e^{a_{n+1}}}$ だから. $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\underline{1}$.

④ $\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{AC}=\vec{c}$, $\vec{AD}=\vec{d}$ と表す.



ABCDは1辺の長さが1の正四面体だから.

$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$.

$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{2}$, 同様に $\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$.

PはABの中点だから $\vec{AP}=\frac{1}{2}\vec{b}$.

QがACを $s:1-s$ に内分するとして. $\vec{AQ}=s\vec{c}$ $(0\leqq s\leqq 1)$

$$|\vec{PD}|^2=|\vec{d}-\tfrac{1}{2}\vec{b}|^2=|\vec{d}|^2-\vec{b}\cdot\vec{d}+\tfrac{1}{4}|\vec{b}|^2=\tfrac{5}{4}-\tfrac{1}{2}=\tfrac{3}{4}$$

$$|\vec{QD}|=|\vec{d}-s\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2s\vec{c}\cdot\vec{d}+s^2|\vec{c}|^2=1-s+s^2$$

$$\vec{DP}\cdot\vec{DQ}=\left(\tfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{d}\right)\cdot\left(s\vec{c}-\vec{d}\right)=\tfrac{1}{4}s-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}s+1=\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{4}s.$$

$$\cos\angle PDQ=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}s}{\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{1-s+s^2}}=\frac{3-s}{2\sqrt{3}\sqrt{1-s+s^2}}$$

$\left(\dfrac{3-s}{\sqrt{1-s+s^2}}\right)^2=f(s)$ とすると. $\left(f(s)=\dfrac{s^2-6s+9}{1-s+s^2}\right)$

$$f'(s)=\frac{(2s-6)(1-s+s^2)-(s^2-6s+9)(2s-1)}{(1-s+s^2)^2}=\frac{(s-3)(\cancel{2s^2}-2s+2-\cancel{2s^2}+7s-3)}{(1-s+s^2)^2}$$

$$=\frac{(s-3)(5s-1)}{(1-s+s^2)^2}$$

$0\leqq s\leqq1$ の範囲での $f(s)$ の増減は右のようになる.

s	0	$\cdots$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$	1
$f'(s)$		$+$	0	$-$	
$f(s)$		↗		↘	

$$f\left(\tfrac{1}{5}\right)=\frac{\frac{1}{25}-\frac{6}{5}+9}{1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}}=\frac{1-30+225}{25-5+1}=\frac{196}{21}=\frac{28}{3}$$

よって. $\cos\angle PDQ$ は $s=\frac{1}{5}$ のとき最大となり、その値は

$$\cos\angle PDQ=\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\sqrt{\frac{28}{3}}=\underline{\frac{\sqrt{7}}{3}}$$

⑤ $f(x)$ が $g(x)$ で割りきれないと仮定する

このとき $\dfrac{f(n)}{g(n)} = pn + q + \dfrac{r}{g(n)}$ と表すことができる

$\dfrac{f(n)}{g(n)}$ および $\dfrac{f(n+1)}{g(n+1)}$ はいずれも整数だから、

$\dfrac{f(n+1)}{g(n+1)} - \dfrac{f(n)}{g(n)}$ も整数で、

$$\frac{f(n+1)}{g(n+1)} - \frac{f(n)}{g(n)} = p(n+1) + q + \frac{r}{dn+d+e} - pn - q - \frac{r}{dn+e}$$

$$= p + \frac{r}{dn+d+e} - \frac{r}{dn+e}$$

$$= p + \underbrace{\frac{-dr}{(dn+d+e)(dn+e)}}$$

ここで $n \to \infty$ のとき、〰〰部は0に収束するので上の式が整数であり続けることはありえない。

よって仮定は矛盾しており、$f(x)$ は $g(x)$ で割りきれる。

⑥ $0<x_n<1$ を帰納法で示す

$n=1$ のとき　$x_0=\frac{1}{2}$ だから成りたつ．

$n=k$ のとき　$0<x_k<1$ と仮定すると．$0<\frac{x_k}{2}<\frac{1}{2}<1$．

また　$\frac{1}{2}<\frac{x_k+1}{2}<1$　だから．　$0<x_k<1$．

以上より．数学的帰納法によって全てのnについて．$0<x_n<1$．

$x_n=f_0(x_{n-1})=\frac{x_{n-1}}{2}=\frac{0+x_{n-1}}{2}$ より．このとき．数直線上で

x_n は　0 と x_{n-1} の中点．

$x_n=f_1(x_{n-1})=\frac{x_{n-1}+1}{2}$ より．上と同様に．x_n は x_{n-1} と 1 の中点．

$\therefore x_1=\frac{1}{2}$ だから．x_n は、$x=\frac{1}{2}$ について対称に変化し．

$x_n<\frac{2}{3}$ となる確率と $x_n>\frac{1}{3}$ となる確率は等しい．

$x_{n+1}<\frac{2}{3}$ となるのは．$0<x_n<1$ だから

(i) $x_{n+1}=f_0(x_n)$ となるとき．

(ii) $x_{n+1}=f_1(x_n)$ となり．かつ．$\frac{x_n+1}{2}<\frac{2}{3}\Leftrightarrow x_n<\frac{1}{3}$ となるとき．

のいずれか．$x_n\neq\frac{1}{3}$ であることは帰納的に明らか．

以上より　$P_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(1-P_n)$

$P_{n+1}=1-\frac{1}{2}P_n$

$P_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{2}{3}\right)$

$\therefore P_n-\frac{2}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore \underline{P_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ //