①

(1) $y=x-a$ を Eの式に代入

$$\frac{x^2}{4}+(x-a-1)^2=1$$

$$x^2+4x^2-8x(a+1)+4(a+1)^2-4=0.$$

$$5x^2-8(a+1)x+4a^2+8a=0 \quad \cdots ①$$

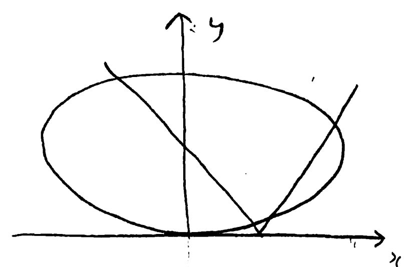
判別式をDとして

$$D/4=4^2(a+1)^2-5\times4(a^2+2a)=0$$

$$a^2+2a-4=0 \qquad \therefore\ a=\underline{-1\pm\sqrt{5}}$$

(2) $x>a$のとき

$x>a$の範囲で ① が Eと2つの解をもてばよい。



$f(x)=5x^2-8(a+1)x+4a^2+8a$ と

すると. $f(a)=a^2$

軸は $\frac{4(a+1)}{5}$ なので. そのための条件は

$$D/4>0,\quad a^2>0,\quad \frac{4(a+1)}{5}>a$$

$$\Leftrightarrow\quad -1-\sqrt{5}<a<-1+\sqrt{5},\quad a>0,\quad a<4.$$

$$\Leftrightarrow\quad 0<a<-1+\sqrt{5}.$$

$x<a$のとき.

同様に. $y=-x+a$ と Eとが. $x<a$で 2つの解をもてばよい.

グラフの対称性より、そのための条件は $1-\sqrt{5}<a<0$.

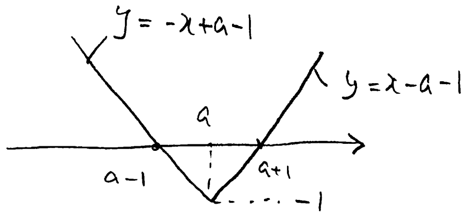
$a=0$のとき.

グラフは 3つの交点しかもたない.

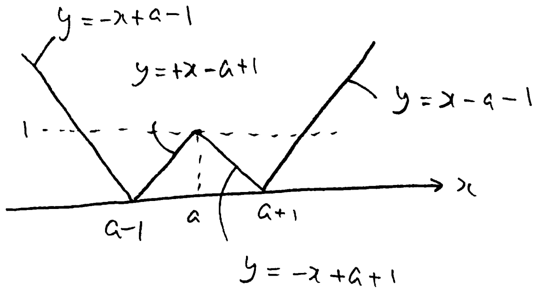
以上より $\underline{1-\sqrt{5}<a<0,\ 0<a<-1+\sqrt{5}}$

(3)

$y=|x-a|-1$ のグラフは右のようになる

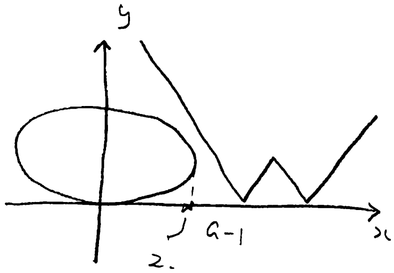


したがって $y=\big||x-a|-1\big|$ のグラフは下のようになる



これとEが共有点をもたないときは

右図のようになっているとき



(i) $a-1>2$ のとき

$y=-x+a-1$ とEが共有点をもたないときに

交点が存在しない。

②

(1) $f'(t)=1$, $g'(t)=0$ より $f(t)=t+C_1$, $g(t)=C_2$

(C_1, C_2は積分定数)

$P_a=(0,0)$ だから $f(a)=a+C_1=0$, $g(a)=C_2=0$.

$\therefore f(t)=t-a$, $g(t)=0$

$\therefore (f(b), g(b)) = \underline{(b-a, 0)}$

(2) $f'(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$, $g'(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ $\quad \vec{v}=\left(\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}, \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$

$\overrightarrow{P_aP_b}=\left(\dfrac{e^b+e^{-b}-e^a-e^{-a}}{2}, \dfrac{e^b-e^{-b}-e^a+e^{-a}}{2}\right)$

$e^t-e^{-t}:e^t+e^{-t}=e^b+e^{-b}-e^a-e^{-a}:e^b-e^{-b}-e^a+e^{-a}$ となるのは

$\cancel{e^{b+t}}+e^{-b+t}\cancel{-e^{a+t}}-e^{-a+t}+e^{b-t}+\cancel{e^{-b-t}}-e^{-t+a}\cancel{-e^{-a-t}}$

$=\cancel{e^{b+t}}-e^{-b+t}\cancel{-e^{a+t}}+e^{-a+t}-e^{b-t}+\cancel{e^{-b-t}}+e^{a-t}\cancel{-e^{-a-t}}$

$e^{t-b}-e^{t-a}+e^{b-t}-e^{a-t}=0$

$e^{t-b}+\dfrac{1}{e^{t-b}}=e^{t-a}+\dfrac{1}{e^{t-a}}$ $\quad\cdots ①$

ここで $e^x+\dfrac{1}{e^x}$ は偶関数で $x>0$ のとき単調に増加するので ① を満たすのは

$t-b=t-a$ または $t-b=-(t-a)$ のときで. $a\neq b$ だから $t=\underline{\dfrac{a+b}{2}}$

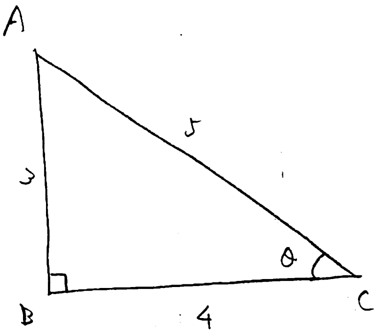
(3) $\vec{v}=(f'(t), g'(t))$ $\quad \overrightarrow{P_aP_b}=(f(b)-f(a), g(b)-g(a))$

これが平行となるとき. (2)と同様に考えて.

$f'(t)\{g(b)-g(a)\}=g'(t)\{f(b)-f(a)\}$ $\quad\cdots ②$

を満たす t が存在すればよい。したがって ② を満たす t が存在することを示す.

③



$AC^2 = 5^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2$ だから、$\angle ABC = 90°$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\sin\theta = \frac{3}{5}$

また右図より $0° < \theta < 45°$ は明らか。

(1) $\sin\theta = \frac{3}{5} > \frac{1}{2} = \sin 30°$ より、 $\theta > 30°$

(2) $30° < \theta < 45°$ より $90° < 3\theta < 135°$ したがって $30° < \theta < 45°$ において

$\sin 3\theta$ は単調に減少する。

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3 \times \frac{3}{5} - 4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{9}{5} - \frac{108}{125} = \frac{117}{125}$

$\sin 40° \times 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1.8}{2} < \frac{9}{10} = \frac{225}{250} < \frac{117}{125}$

よって $\sin 3\theta > \sin 40° \times 3$

$3\theta < 40° \times 3$ $\therefore \theta < 40°$

(3) $36° = \alpha$ とすると $5\alpha = 180°$

$\cos 3\alpha = \cos(180° - 2\alpha)$

$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = -2\cos^2\alpha + 1$

$(\cos\alpha + 1)(4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1) = 0$ $\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ $(\because \cos\alpha > 0)$

$\cos 36° - \cos\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{4}{5} = \frac{-11 + 5\sqrt{5}}{20}$

$(5\sqrt{5})^2 - 11^2 = 125 - 121 = 4 > 0$ $\therefore \frac{-11 + 5\sqrt{5}}{20} > 0$

すなわち $\cos 36° > \cos\theta$ $\therefore 36° < \theta$

(4) n を正の整数としても一般性を失わないので n を正の数とする

$n\theta = 30° + 360° \times m$

を満たす n, m が存在したと仮定する。

このとき

$\cos n\theta = \cos(30° + 360° \times m) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin n\theta = \frac{1}{2}$

ここで

$\cos\theta + i\sin\theta = z$ とすると、

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$= \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

左辺の実部は実数だが、右辺の実部は無理数なので、

このようなnは存在しない。

よって、仮定は矛盾しており、$n\theta = 30° + 360° \times m$を満たす$n$、$m$は

存在しない。

④

(1) $P(3,2)$ について.

1, 2回目で最初の1の連続が現れる　$1\times1\times6$ 通り

2, 3 〃 〃　$5\times1\times1$ 〃

$$P(3,2) = \frac{6+5}{6^3} = \underline{\frac{11}{216}}$$

$Q(3,2)$ について

1, 2, 3回目で最初の2+1回の同じ目が現れるとき.　$6\times1\times1\times6$ 通り

2, 3, 4 〃 〃　$6\times5\times1\times1$ 〃

$$Q(3,2) = \frac{36+30}{6^4} = \underline{\frac{11}{216}}$$

(2) 余事象は、1の目が出ないときなので

$$P(n,1) = \underline{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

(3) $P(n+2,2)$ について

(i) 1回目が1

(i-1) 2回目が1 のとき.　3回目以降は何でもよい.　$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1$

(i-2) 〃 2〜6 〃　3回目から $n+2$ 回目までの n 回で 1の目が2連続となればよく、その確率は　$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times P(n,2)$

(ii) 1回目が2〜6

2回目から $n+2$ 回目までの $n+1$ 回で 1の目が連続するので　$\frac{5}{6}\times P(n+1,2)$

(i)(ii)より　$$\underline{P(n+2,2) = \frac{1}{36} + \frac{5}{36}P(n,2) + \frac{5}{6}P(n+1,2)}$$

(4) $Q(n+2,2)$ について

1回目と2回目が同じ、かつ 2回目と3回目も同じ数　$1\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times1 = \frac{1}{36}$

〃 〃 〃 異なる数　$Q(n,2)\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$

〃 異なる数　$Q(n+1,2)\times\frac{5}{6}$

以上より

$$Q(n+2,2) = \frac{1}{36} + \frac{5}{36}Q(n,2) + \frac{5}{6}Q(n+1,2)$$

これは (3) の $P(n+2,2)$ の漸化式と同じもの.

$$P(3,2) = Q(3,2).$$

$$P(2,2) = \frac{1}{36}, \quad Q(2,2) = 1 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

だから. 初項も同じ値となるので. $P(n,m)$ と $Q(n,m)$ は同じ値となる

$$P(n,m) = Q(n,m).$$