① (1) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \iff \log_c a \log_a b = \log_c b$ …①

①を示す。

①の左辺 $= \log_c a \times \log_a b$

$= \log_a b \times \log_c a$

$= \log_c a^{\log_a b}$

ここで 対数の定義より $a^{\log_a b} = b$ なので 上式は

$= \log_c b$

$=$ 右辺.

よって①は成立するので $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ が示された.

(2) 真数条件より

$x+3>0,\quad x>0. \iff x>0.$

与式の底を2に揃える

$\frac{1}{2}\log_2(x+3) = \log_2 x - \log_2 2$

$\log_2(x+3) = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$x+3 = \frac{1}{4}x^2$

$x^2 - 4x - 12 = 0.$

$x = 6, -2$

このうち $x>0$ を満たすのは $\underline{x=6.}$

(3) 真数条件より $x>-k.\ x>0.$

底を2に揃えて整理

$\log_2(x+k) = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$$x+k = \frac{1}{4}x^2$$

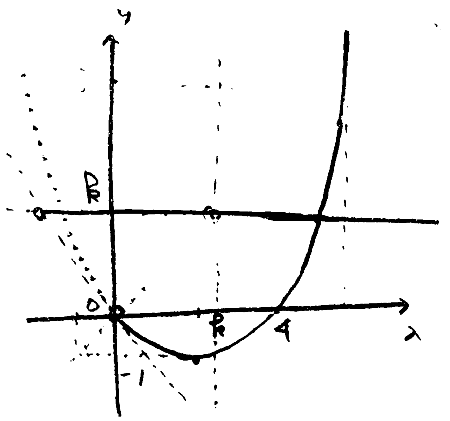
$$k = \frac{1}{4}x^2 - x \quad \cdots ②$$

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$ とする。

② を満たす x が存在するのは　$x>0$ かつ $x>-k$ の範囲で

$y=f(x)$ と　$y=k$ のグラフが交点を持つことである

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 1$$



となるので $f(x)$ のグラフは右のように

なり、$y=k$ の $x>-k$ の範囲と

$y=f(x)$ の $x>0$ の部分が交わる

条件を考える。

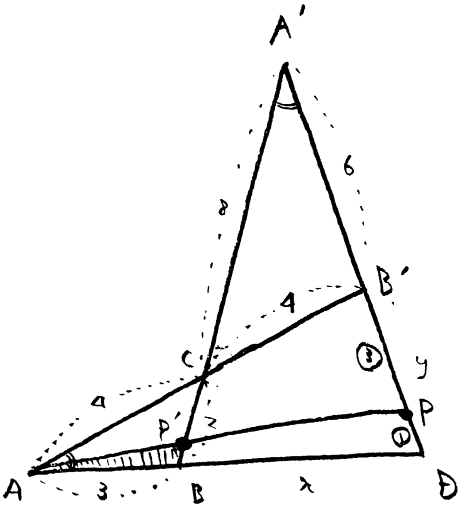
$\therefore \quad k \geqq -1$

②

(1) $\angle B'A'C = \angle BAC$ および

$\angle B'CA' = \angle BCA$ (対頂角) より

$\triangle A'B'C \sim \triangle ABC$



よって

$AB : BC : CA = A'B' : B'C : CA'$

となるので

$A'B' = 6,\ A'C = 8$

また

$\angle B'A'C = \angle BAC$ および $\angle D$ 共通より

$\triangle A'BD \sim \triangle AB'D$

$BD = x,\ B'D = y$ とおくと

$x : y = 10 : 8 = 6+y : 3+x$

$\Leftrightarrow \quad 4x = 5y, \quad 24+4y = 15+5x$

$\therefore\ x = 5,\ y = 4$

$\underline{DB = 5,\ DB' = 4}$

(2) $\triangle A'B'C$ について余弦定理を用いると

$$\cos\angle B'A'C = \frac{8^2+6^2-4^2}{2\cdot 8\cdot 6} = \underline{\frac{7}{8}}$$

$\triangle A'B'C$ の面積を S とする.

$$S = \frac{1}{2}\times 6\times 8\times\sqrt{1-\cos^2\angle B'A'C} = \underline{3\sqrt{15}}$$

(3) $DB' = 4$ だから, $DP = 1,\ PB' = 3$.

メネラウスの定理より

$$\frac{DA'}{A'P}\times\frac{PP'}{P'A}\times\frac{AB}{BD} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{6+4}{6+3}\times\frac{PP'}{P'A}\times\frac{3}{5} = 1$$

$PP' : P'A = 3 : 2$.

$\triangle ADB'$の面積は

$$\frac{1}{2}\times(3+5)\times 8\times\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=4\sqrt{15}$$

$$\triangle APD=\frac{1}{4}\times\triangle ADB'=\sqrt{15}$$

$$\triangle ABP'=\frac{AB}{AD}\times\frac{AP'}{AP}\times\triangle APD=\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}\times\sqrt{15}=\underline{\frac{3}{20}\sqrt{15}}_{\;//}$$

③

(1) $f'(x) = e^{\sqrt{x}-1} \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x}-1} - 1\right)$

$f'(x) = 0$ となるのは $e^{\sqrt{x}-1} - 1 = 0$ すなわち $\sqrt{x} - 1 = 0$ より $x = 1$.

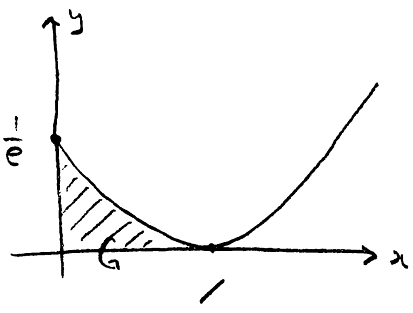
のときで. $f(x)$ の増減は下のようになる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(1) = 0$ だから $x \geqq 0$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ となる

また等号は $x = 1$ のときに成り立つ

(2) 右図より、もとめる体積を V として



$V = \pi \int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x}\right)^2 dx$

$= \pi \int_0^1 e^{2\sqrt{x}-2} - 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}-1} + x \, dx$

$= \pi \int_0^1 e^{2\sqrt{x}-2} - 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}-1} \, dx + \frac{1}{2}\pi$

ここで $\sqrt{x} - 1 = t$ とすると. $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline t & -1 \to 0 \end{array}$ だから

$V = \pi \int_{-1}^{0} \left(e^{2t} - 2\sqrt{x}e^{t}\right) 2\sqrt{x} \, dt + \frac{1}{2}\pi$

$= \pi \int_{-1}^{0} 2e^{2t}(t+1) - 4(t+1)^2 e^{t} \, dt + \frac{1}{2}\pi$.

また $\int te^{2t} dt = \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{2}\int e^{2t} dt = \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + C$ （C は積分定数 以下同様）

$$\int t^2 e^t dt = t^2e^t - 2\int te^t dt = t^2e^t - 2te^t + 2\int e^t dt$$

$$= (t^2 - 2t + 2)e^t + C$$

$$\int te^t dt = te^t - e^t + C$$

となるので

$$V = \pi\left[te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + e^{2t} - 4(t^2 - 2t + 2)e^t - 8te^t + 8e^t - 4e^t\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\pi$$

$$= \pi\left(0 - \frac{1}{2} + 1 \cancel{-8} - 0 \cancel{+8} - 4\right) - \pi\left(\cancel{-\frac{1}{e^2}} - \frac{1}{2e^2} \cancel{+\frac{1}{e^2}} - 20\frac{1}{e} + \frac{8}{e} + \frac{8}{e} - \frac{4}{e}\right) + \frac{1}{2}\pi$$

$$= \underline{-3\pi + \frac{\pi}{2e^2} + \frac{8}{e}\pi}$$

④

(1) $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \quad (n \geqq 2)$

$= 119 + \sum_{k=1}^{n-1}(12k - 61) = 119 + \frac{-49+12n-73}{2} \times (n-1)$

$= (6n-61)(n-1)+119 = 6n^2 - 67n + 180 \quad (n \geqq 2)$

ここに $n=1$ を代入すると、$a_1 = 119$ となるので、これは $n=1$ でも成り立つ

$\frac{1}{b_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{b_k} \quad (n \geqq 2)$　　∴ $\underline{a_n = 6n^2 - 67n + 180}$

$= -\frac{1}{2}n(n-2c+1) + \frac{1}{2}(n-1)(n-\cancel{1}-2c+\cancel{1})$

$= -n + c$

∴ $b_n = \frac{1}{c-n} \quad (n \geqq 2) \quad \cdots ①$

$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{b_k} = -\frac{1}{2} \times 1(1-2c+1)$ より $b_1 = \frac{1}{c-1}$ となるので、①は $n=1$ のときでも成り立つ.

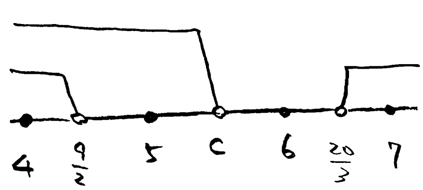
∴ $\underline{b_n = \frac{1}{c-n}} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$

(2) $a_n = (3n-20)(2n-9)$ だから、$a_n > 0$ となるのは

$n < \frac{9}{2}$ または $n > \frac{20}{3}$

また $b_n > 0$ となるのは $c - n > 0$

よって $a_n b_n > 0$ となるのは



$a_n > 0$ かつ $b_n > 0 \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4.$

$a_n < 0$ かつ $b_n < 0 \Rightarrow n = 6$

∴ $\underline{n = 1, 2, 3, 4, 6}$

(3) (2) より

$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n$ として

$S_1 < S_2 < S_3 < S_4 > S_5 < S_6 > S_7 > S_8 > \cdots$

よって最大となるのは S_4 または S_6.

$$a_5 b_5 = -5 \times \frac{1}{c-5}, \quad a_6 b_6 = -6 \times \frac{1}{c-6}$$

$$a_5 b_5 + a_6 b_6 = -\frac{5}{c-5} - \frac{6}{c-6}$$

$$= \frac{-30+5c+6c-30}{(c-5)(6-c)} = \frac{11c-60}{(c-5)(6-c)}$$

よって $11c-60>0$ のとき $n=6$ のときが最大

$11c-60<0$ 〃 $n=4$ 〃 〃 となる

$$\begin{cases} 5 < c < \frac{60}{11} \text{ のとき} & n=4 \\ c = \frac{60}{11} \text{ のとき} & n=4 \text{ または } 6 \\ \frac{60}{11} < c < 6 \text{ のとき} & n=6. \end{cases}$$