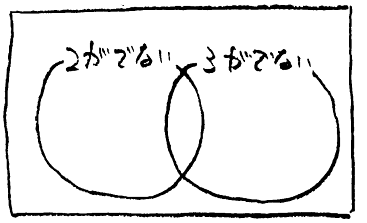
①



(1) 根元事象は 6^n

2がでない … 5^n

3 〃 … 5^n

2も3もでない … 4^n.

よってもとめる確率は $\dfrac{5^n+5^n-4^n}{6^n}=\underline{\dfrac{5^n-2\cdot4^{n-1}}{3\cdot6^{n-1}}}$ //

(2) 1〜6のうち、素数は 2, 3, 5

したがって lが 素数となるのは、

(i) 1と2しかでないとき (ただし、2は少なくとも1回でる)

(ii) 1と3 〃 (〃 3 〃)

(iii) 1と5 〃 (〃 5 〃)

の3つのパターンが考えられる。

(i)〜(iii)はいずれも 2^n-1 通りあるので、もとめる確率は

$$\frac{(2^n-1)\times3}{6^n}=\underline{\frac{2^n-1}{2\cdot3^{n-1}}}$$ //

(3) lが1〜6のときに限られる.

$l=1$のとき、 n回全て1なので 1^n通り

$l=2$ 〃 (2)の(i)のとき 2^n-1 通り

$l=3$ 〃 (2)の(ii) 〃 2^n-1 〃

$l=4$ 〃 1と2と4しかでないとき.

(ただし、全て1, 全て2, 4がでないときは除く)

$3^n-2\times1^n-(2^n-2)$ 通り.

$l=5$ のとき (2)の(iii)のとき 2^n-1 通り.

$l=6$ のとき. 1と2と3と6しかでないとき.

(ただし 6がでないときを除く)

4^n-3^n

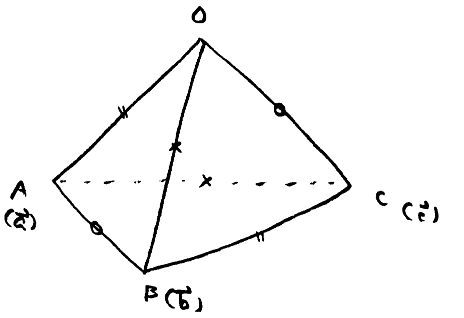
以上より、もとめる確率は

$$\frac{1+3(2^n-1)+3^n-2-2^n+2+4^n-3^n}{6^n}=\frac{4^n+2^{n+1}-2}{6^n}$$

② (1) $\vec{a}=\vec{y}+\vec{z}$ …①

$\vec{b}=\vec{z}+\vec{x}$ …②

$\vec{c}=\vec{x}+\vec{y}$ …③



②+③−① より

$2\vec{x}=\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}$

$\therefore\ \vec{x}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$

同様に ①+③−② より $\vec{y}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b})$,

①+②−③ より $\vec{z}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$

(2) OA = BC より $|\vec{a}|=|\vec{c}-\vec{b}|$

2乗して、$\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ を代入 $|\vec{y}+\vec{z}|^2=|\vec{y}-\vec{z}|^2$

整理すると $\vec{y}\cdot\vec{z}=0$.

同様に OB = CA より $\vec{x}\cdot\vec{z}=0$.

OC = AB より $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$.

以上より $\underline{\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{z}=\vec{z}\cdot\vec{x}=0}$.

(3) $\vec{OP}=k\vec{x}+l\vec{y}+m\vec{z}$ とする

条件より $|\vec{OP}|=|\vec{PA}|=|\vec{PB}|=|\vec{PC}|$

$\Leftrightarrow\ k^2|\vec{x}|^2+l^2|\vec{y}|^2+m^2|\vec{z}|^2=k^2|\vec{x}|^2+(1-l)^2|\vec{y}|^2+(1-m)^2|\vec{z}|^2$

$=(1-k)^2|\vec{x}|^2+l^2|\vec{y}|^2+(1-m)^2|\vec{z}|^2=(1-k)^2|\vec{x}|^2+(1-l)|\vec{y}|^2+m^2|\vec{z}|^2$

$\Leftrightarrow\ (2l-1)|\vec{y}|^2+(2m-1)|\vec{z}|^2=0,\quad (2k-1)|\vec{x}|^2+(2m-1)|\vec{z}|^2=0$

$,\ (2k-1)|\vec{x}|^2+(2l-1)|\vec{y}|^2=0$

後ろ2つの式から $(2l-1)|\vec{y}|^2-(2m-1)|\vec{z}|^2=0$ となるが、

これと、先の1つ目の式が同時に成り立つのは、$2l-1=0$ かつ

$2m-1=0$ のときに限られる。また同様に $2k-1=0$

以上より $k=l=m=\frac{1}{2}$

$\vec{OP}=\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})=\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}+\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})=\underline{\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$ //

$|\vec{OP}|=\frac{1}{4}\sqrt{2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2+2|\vec{c}|^2}=\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2}}$ //

(4) $C(x, y, z)$ とすると

$$\vec{OP} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x \\ 5+y \\ 2+z \end{pmatrix},\ \vec{AP} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x \\ y-3 \\ z-6 \end{pmatrix},\ \vec{BP} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x \\ y-7 \\ 2+z \end{pmatrix},\ \vec{CP} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3x \\ 5-3y \\ 2-3z \end{pmatrix}$$

$|\vec{OP}| = |\vec{AP}| = |\vec{BP}| = |\vec{CP}|$ より

$$x^2+25+10y+y^2+4+4z+z^2 = x^2+y^2-6y+9+z^2-12z+36$$
$$= x^2+y^2-14y+49+z^2+4z+4 = 9x^2+9y^2-30y+25+9z^2-12z+4$$

$\Leftrightarrow\quad y=1,\qquad 25+10y+4+4z = -6y+9-12z+36$

$\qquad\qquad\qquad 8x^2+8y^2-40y+8z^2-16z=0$

$\Leftrightarrow\quad y=1,\qquad z=0,\qquad x=\pm 2$

よって $\quad \underline{P(\pm 2, 1, 0)}$

(別解)

(3) について. Pは OABC の重心であると予測できるので以下の解答も考えられる

(解答)

$\vec{OQ} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ とする

$\vec{OQ} = \frac{1}{4}(\vec{y}+\vec{z}+\vec{z}+\vec{x}+\vec{x}+\vec{y}) = \frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})$

$|\vec{OQ}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2+|\vec{z}|^2) \qquad (\because \vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{z} = \vec{z}\cdot\vec{x} = 0)$

$|\vec{AQ}|^2 = |\frac{1}{2}\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}+\frac{1}{2}\vec{z}-\vec{y}-\vec{z}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{x}-\vec{y}-\vec{z}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2+|\vec{z}|^2)$

$|\vec{BQ}|^2, |\vec{CQ}|^2$ も同様にもとめると $\frac{1}{4}(|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2+|\vec{z}|^2)$

したがって $OQ=AQ=BQ=CQ$ であり Q は OABC の外接球の中心. すなわち P と同一の点である.

$\therefore\quad \underline{\vec{OP} = \frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$

$|\vec{OP}|^2 = \frac{1}{16}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})$

$|\vec{a}| = |\vec{c}-\vec{b}|$ より $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$ などを代入.

$|\vec{OP}|^2 = \frac{1}{16}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-\cancel{|\vec{a}|^2}+\cancel{|\vec{a}|^2}+\cancel{|\vec{b}|^2}-\cancel{|\vec{c}|^2}+|\vec{a}|^2+\cancel{|\vec{c}|^2}-\cancel{|\vec{b}|^2})$

$= \frac{2}{16}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2) \qquad \therefore\ \underline{|\vec{OP}| = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2}}$

③ (1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{\cos x\, e^x - \sin x\, e^x}{e^{2x}} = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{(-\sin x - \cos x)e^x - (\cos x - \sin x)e^x}{e^{2x}} = \frac{-2\cos x}{e^x}$$

$$f'''(x) = \frac{2\sin x\, e^x + 2\cos x\, e^x}{e^{2x}} = \frac{2(\sin x + \cos x)}{e^x}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{2(\cos x - \sin x)e^x - 2(\sin x + \cos x)e^x}{e^{2x}} = \frac{-4\sin x}{e^x}$$

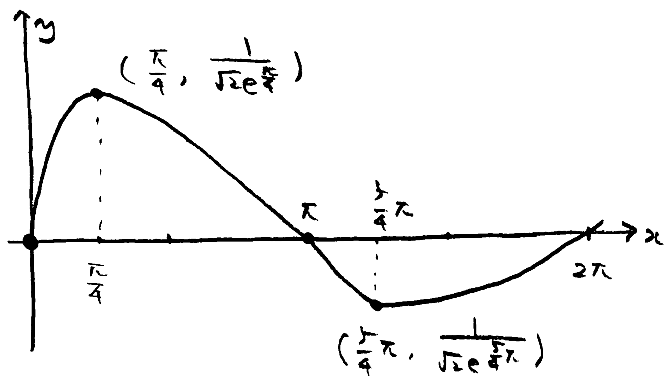
(2) $f'(x) = 0$ となるのは $\cos x = \sin x$ のときなので $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$

したがって $f(x)$ の増減は右のようになる。 $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 0$

$f(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$, $f(\frac{5}{4}\pi) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
f'	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
f		↗		↘		↗	

以上より $f(x)$ のグラフは下のとおり。

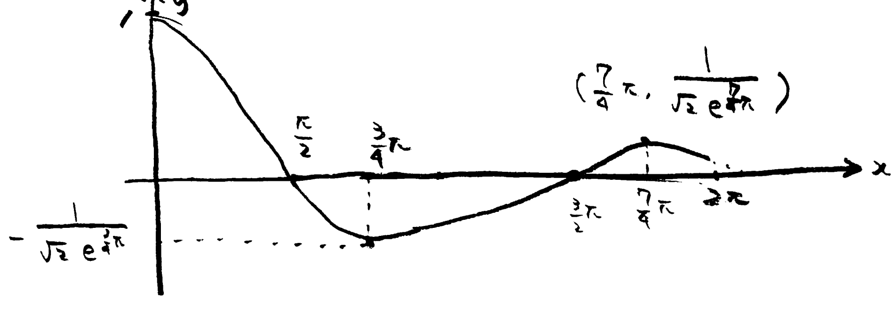


$g(x) = \dfrac{-\sin x - \cos x}{e^x}$ より $g'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

$g(x)$ の増減は右のとおり

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↘		↗		↘	$\frac{1}{e^{2\pi}}$

よってグラフは下のとおり



(3) $f(x)=g(x)$ より $\sin x=\cos x$

$x\geqq 0$ においてこれを満たすのは $x=\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{13}{4}\pi, \dots$

初項 $\frac{\pi}{4}$、公差 π の等差数列になっているので $x=n\pi-\frac{3}{4}\pi$

したがって $P_n\left(n\pi-\frac{3}{4}\pi,\ \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2}\,e^{n\pi-\frac{3}{4}\pi}}\right)$

(4) $$S_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}|f(x)-g(x)|\,dx$$

$$=\left|\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x-\cos x}{e^x}\,dx\right|$$

ここで $\frac{\sin x-\cos x}{e^x}=-f'(x)$ なので、

$$S_n=\left|\Big[-f(x)\Big]_{a_n}^{a_{n+1}}\right|=\left|f(a_{n+1})-f(a_n)\right|$$

$$=\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}\,e^{(n+1)\pi-\frac{3}{4}\pi}}-\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2}\,e^{n\pi-\frac{3}{4}\pi}}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\,e^{n\pi-\frac{3}{4}\pi}}\left(\frac{1}{e^\pi}+1\right)$$

S_n は初項 $\frac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}\pi}}\left(\frac{1}{e^\pi}+1\right)$ 公比 $\frac{1}{e^\pi}$ の等比数列

したがって $$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}S_n=\frac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}\pi}}\left(\frac{1}{e^\pi}+1\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{e^\pi}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}\pi}}\left(\frac{e^\pi+1}{e^\pi-1}\right)$$

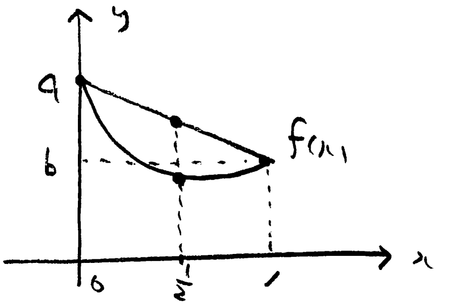
④ (1) $\{f'(x)\}^2 \leqq f(x)f''(x) \leqq 2\{f'(x)\}^2$ より

$$\frac{\{f'(x)\}^2}{f(x)} \leqq f''(x) \leqq \frac{2\{f'(x)\}^2}{f(x)} \quad (\because f(x)>0)$$

よって $f''(x)$は必ず正となるので、$f(x)$は$[0,1]$において下に凸

したがって$f(x)$のグラフは

右図のようになるが、このとき



$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqq \frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{a+b}{2}$$

(証明終)

(2) $g(x) = \log f(x)$ とする

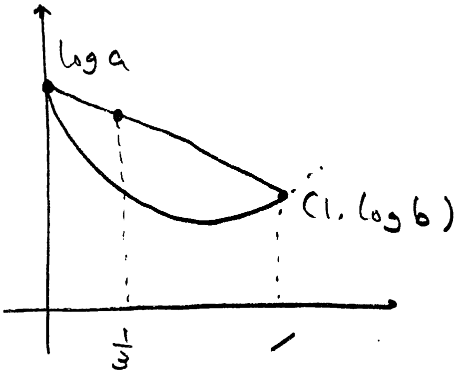
$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad g''(x) = \frac{f''(x)f(x) - \{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^2}$$

ここで問題の条件より

$$0 \leqq f''(x)f(x) - \{f'(x)\}^2 \leqq \{f'(x)\}^2$$

となるので、$g''(x) \geqq 0$、となり、$g(x)$も下に凸

よって



$$g\left(\frac{1}{3}\right) \leqq \frac{2\log a + \log b}{3}$$

$$\log f\left(\frac{1}{3}\right) \leqq \frac{1}{3}\log a^2 b$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) \leqq \sqrt[3]{a^2 b}$$ となっている

(証明終)

(3) $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ とおく

$$h'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}, \quad h''(x) = \frac{-f''(x)f(x) + 2f'(x)^2}{f(x)^3}$$

ここで条件より $f(x)f''(x) \leqq 2\{f'(x)\}^2$ だから $h''(x) \geqq 0$ となり

$h(x)$は$[0,1]$において下に凸なグラフであることがわかる

よって

$$h\left(\frac{1}{4}\right) \leqq \frac{3\cdot h(0) + h(1)}{4} = \frac{3\times\frac{1}{f(0)} + \frac{1}{f(1)}}{4}$$

$$\frac{1}{f\left(\frac{1}{4}\right)} \leqq \frac{\frac{3}{a} + \frac{1}{b}}{4} = \frac{3b+a}{4ab}$$

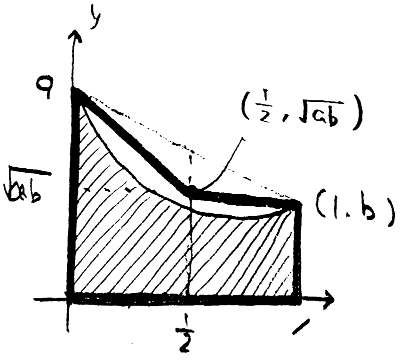
$a, b, f\left(\frac{1}{4}\right)$はいずれも正の値をとるので、逆数をとり、

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \geqq \frac{4ab}{a+3b}$$ が成り立つ。

証明終

(4) (2) の$g(x)$を用いて、

$$g\left(\frac{1}{2}\right) \leqq \frac{\log a + \log b}{2} \iff f\left(\frac{1}{2}\right) \leqq \sqrt{ab}$$



$f(x)$は$[0,1]$において下に凸なので、右図のように、太枠内の面積は斜線部の面積よりも大きくなる。

よって

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqq \frac{1}{2}(a+\sqrt{ab})\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(b+\sqrt{ab})\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}\sqrt{ab} + \frac{1}{4}b$$

が成り立つ

証明終