①(1) 赤1コ白2コの確率は $\dfrac{{}_2C_1 \times {}_5C_2}{{}_7C_3} = \dfrac{\cancel{3}\cdot 2\cdot 2\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}}{7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{2}} = \dfrac{4}{7}$

白3コの確率は $\dfrac{{}_5C_3}{{}_7C_3} = \dfrac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}}{7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}} = \dfrac{2}{7}$

(2) 袋Aから、赤2コの確率は $\dfrac{{}_2C_2\cdot{}_5C_1}{{}_7C_3} = \dfrac{5\cdot 3\cdot 2}{7\cdot 6\cdot 5} = \dfrac{1}{7}$

そのときBから白2コをとるのは 赤4コ白1コからは白2コをとれないので 0

袋Aから赤1コ白2コのとき Bから白2コをとるのは 赤3、白2だから

$\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \dfrac{2}{5\cdot 4} = \dfrac{1}{10}$　　　$\dfrac{4}{7}\times\dfrac{1}{10} = \dfrac{2}{35}$

袋Aから白3コをとるとき Bから白2コをとるのは 赤2、白3だから

$\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \dfrac{3\cdot 2}{5\cdot\cancel{4}_2} = \dfrac{3}{10}$　　　$\dfrac{2}{7}\times\dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{35}$

以上より、 $\dfrac{2}{35} + \dfrac{3}{35} = \dfrac{5}{35} = \underline{\dfrac{1}{7}}$

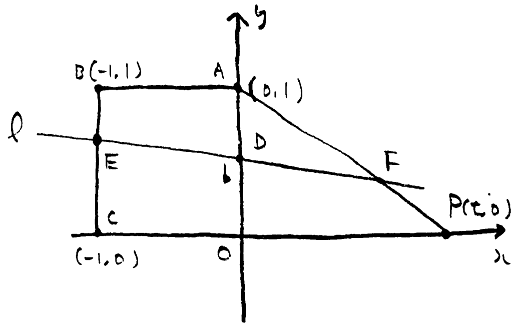
(3) Bから白2コとって、まだ袋Bに白が残っているのはAから白3コをとったときだから

もとめる条件付き確率は

$$\frac{\frac{3}{35}}{\frac{1}{7}} = \frac{3}{5}$$

② (1) ℓはOA上の点を通るので

$$0 \leqq b \leqq 1 \quad \cdots ①$$



BC上の点を通るので

$$0 \leqq a(-1)+b \leqq 1 \quad \cdots ②$$

ℓとOA, BCの交点をD, Eとする　D$(0,b)$, E$(-1,-a+b)$ だから

四角形ODECの面積は　$\frac{1}{2}(b+(-a+b))\times 1 = \frac{1}{2}(2b-a)$

で、これが正方形OABCの面積 1 の $\frac{1}{2}$ になっているので

$$\frac{1}{2}(2b-a) = \frac{1}{2} \qquad \therefore \underline{a=2b-1}$$

(2) $\triangle$OAPの面積は　$\frac{1}{2}\times \mathrm{OP}\times \mathrm{OA} = \frac{1}{2}t\times 1 = \frac{1}{2}t$

直線APは　$y=-\frac{1}{t}x+1$　これとℓの交点は

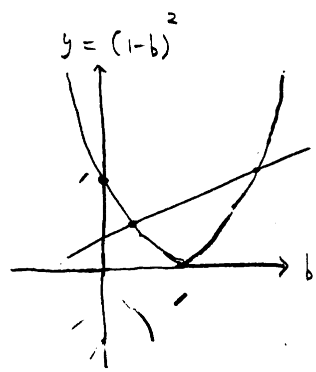
$$ax+b = -\frac{1}{t}x+1 \Leftrightarrow \left(a+\frac{1}{t}\right)x = 1-b \Leftrightarrow x = \frac{1-b}{a+\frac{1}{t}} = \frac{t(1-b)}{at+1}$$

($\because$ $a=\frac{1}{t}$ のとき AP$\parallel\ell$ となり題意を満たさない)

交点をFとするとFは　$F\left(\frac{t(1-b)}{at+1},\ \frac{b-1}{at+1}+1\right)$

$\triangle$AFDの面積が$\triangle$OAPの$\frac{1}{2}$となるので

$$\frac{1}{2}\times(1-b)\times\frac{t(1-b)}{at+1} = \frac{1}{2}t\times\frac{1}{2}$$



ここに(1)を代入、整理して

$$(1-b)^2 t = \frac{1}{2}t\left((2b-1)t+1\right)$$

$t>0$だから　$(b-1)^2 = tb-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \quad \cdots ③$

$$2b^2-2(2+t)b+t+1=0$$

$$b = \frac{(t+2)\pm\sqrt{t^2+2t+2}}{2}$$

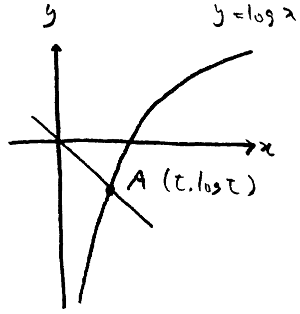
ここで③は $y=(b-1)^2$ と $y=tb-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$ の交点と考えられるので、右上グラフと①より

$$b = \frac{(t+2)-\sqrt{t^2+2t+2}}{2}$$

(3) $\lim_{t\to+0}\frac{t+2-\sqrt{t^2+2t+2}}{2} = \underline{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t+2-\sqrt{t^2+2t+2}}{2} = \lim_{t\to\infty}\frac{\cancel{t^2}+4t+4-\cancel{t^2}-2t-2}{2(t+2+\sqrt{t^2+2t+2})} = \lim_{t\to\infty}\frac{2+\frac{2}{t}}{2\left(1+\frac{2}{t}+\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}\right)} = \frac{2+0}{2(1+0+1)} = \underline{\frac{1}{2}}$$

③ $\frac{\log x}{x} = f(x)$ とする



$f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}$ であり $f'(x) = 0$ となるのは $x = e$ のとき.

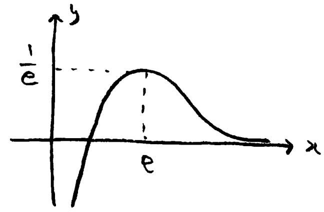
$y=\log x$ のグラフ上の点 $(t, \log t)$ をAとする。このとき

OAの傾きは $\frac{\log t}{t}$ となり $t \to +0$ のとき $\frac{\log t}{t} \to -\infty$

したがって $\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty$

$f(x)$ の増減は下のとおりで $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ だから $y = f(x)$ の概形は下のようになる

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

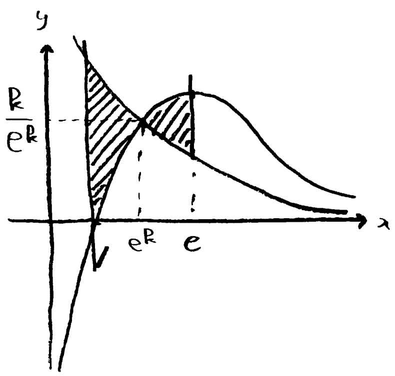


(1) $f(x) = \frac{k}{x}$ となるのは $\log x = k$

つまり $x = e^k$ のときで これが条件より $1 < e^k < e$ の範囲にあるので
$(a = e^k)$

$\underline{0 < k < 1}$

(2) もとめる面積は右図斜線部



$$S = \int_1^{e^k} \frac{k}{x} - \frac{\log x}{x}\,dx + \int_{e^k}^{e} \frac{\log x}{x} - \frac{k}{x}\,dx$$

$$= \int_1^{e^k} \frac{k}{x} - (\log x)\times(\log x)'\,dx + \int_e^{e^k} \frac{k}{x} - (\log x)(\log x)'\,dx$$

$$= \left[k\log x - \frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^{e^k} + \left[k\log x - \frac{1}{2}(\log x)^2\right]_e^{e^k}$$

$$= \left(k^2 - \frac{1}{2}k^2\right)\times 2 - 0 - \left(k - \frac{1}{2}\right) = k^2 - k + \frac{1}{2}$$

(3) $S = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ だから $k = \frac{1}{2}$ のとき 最小値 $S = \frac{1}{4}$ となる

④ (1) $x=0$ のとき $f_n(0)=\dfrac{1}{0-0+1}-\sum_{k=0}^{n}(-0)^{3k}(1+x)=1-1=0$ $\left(\because k=0\text{のとき}(-x)^{3k}=1\right)$

また $(-1)^{n+1}\times\dfrac{0^{3n+3}}{0-0+1}=0$ なので $x=0$ のとき $f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ は成り立っている

$x\neq0$ のとき. $f_n(x)$ の式の両辺に $-x^3$ をかけて.

$$-x^3f_n(x)=\frac{-x^3}{x^2-x+1}-\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k+3}(1+x)$$

これと

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)$$

の辺々を引く..

$$-(1+x^3)f_n(x)=\frac{-1-x^3}{x^2-x+1}+(1+x)-(-x)^{3n+3}(1+x)$$

$$-(x^3+1)f_n(x)=-(x+1)+(1+x)-(-x)^{3n+3}(1+x)$$

$$f_n(x)=\frac{(x+1)(-x)^{3n+3}}{x^3+1}=\frac{(-x)^{3n+3}}{x^2-x+1}=\frac{(-1)^{n+1}x^{3n+3}}{x^2-x+1}$$

よって題意は示された

(2) $\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right|=\left|\int_0^1(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\right|$ $(\because (1))$

$$=\left|\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\right|$$

$$=\left|\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{\frac{3}{4}+(x-\frac{1}{2})^2}dx\right|$$

$$=\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{\frac{3}{4}+(x-\frac{1}{2})^2}dx$$ $\left(\because 0\leqq x\leqq1\text{のとき}\dfrac{x^{3n+3}}{\frac{3}{4}+(x-\frac{1}{2})^2}\geqq0\right)$

$$\leqq\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{\frac{3}{4}}dx.$$ $\left(\because (x-\frac{1}{2})^2\geqq0\right)$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{x^{3n+4}}{3n+4}\right]_0^1=\frac{4}{3(3n+4)}$$ 証明終

(3) $\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\dfrac{1}{x^2-x+1}dx-\int_0^1\left\{\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)\right\}dx$

$$=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k\left\{\int_0^1 x^{3k}+x^{3k+1}dx\right\}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\sum_{k=0}^{n}\left\{(-1)^k\left[\frac{x^{3k+1}}{3k+1}+\frac{x^{3k+2}}{3k+2}\right]_0^1\right\}=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)$$

$\cdots$①

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{3}{4}+(x-\frac{1}{2})^2}dx \quad \cdots (*)$$

$x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおく　　$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0 \to 1$
θ	$-\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{6}$

$$(*) = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\tan^2\theta}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cancel{4}^{\,2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}d\theta = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3}\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \quad \cdots ③$$

① ③ より

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)$$

$$0 \leqq \left|\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)\right| = \left|\int_0^1 f_n(x)dx\right| \leqq \frac{4}{3(3n+4)} \quad (\because (2))$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3(3n+4)}=0$ だから　はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)\right| = 0$$

よって　$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right) = \underline{\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi}$$