①　$f_n(x)=\dfrac{1}{(2-x)^n}+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2+x)^n}$　$(|x|<2)$

(1)　$f_n'(x)=+n\times\dfrac{1}{(2-x)^{n+1}}+(-1)^{n-1}\times(-n)\dfrac{1}{(2+x)^{n+1}}$

$=n\left\{\dfrac{1}{(2-x)^{n+1}}+(-1)^n\dfrac{1}{(2+x)^{n+1}}\right\}$

$=nf_{n+1}(x)$

$\therefore$　$\underline{f_n'(x)=nf_{n+1}(x)}$ //

(2)

$I_n=\int_0^1(1-x)^{n-1}f_n(x)\,dx.$

$=\left[-\frac{1}{n}(1-x)^nf_n(x)\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{n}(1-x)^nf_n'(x)\,dx$

$=\frac{1}{n}f_n(0)+\int_0^1\frac{1}{n}(1-x)^n\,n\,f_{n+1}(x)\,dx$　$(\because (1))$

$=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2^n}+(-1)^{n-1}\times\frac{1}{2^n}\right\}+I_{n+1}$　… ①

nが奇数のとき．①は　$I_n=\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)+I_{n+1}$

$\Leftrightarrow$　$I_n=\dfrac{1}{n2^{n-1}}+I_{n+1}$

nが偶数のとき　①は　$I_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right)+I_{n+1}$

$\Leftrightarrow$　$I_n=I_{n+1}$

証明終

(3) (i) nが偶数のとき

$f_n(x)=\dfrac{1}{(2-x)^n}-\dfrac{1}{(2+x)^n}$

となるが．$0\leqq x\leqq 1$において．$2-x<2+x$なので　$\dfrac{1}{2-x}>\dfrac{1}{2+x}$

だから．$f_n(x)>0$がなりたつ．

また．$0\leqq x\leqq 1$においては　$(1-x)^{n-1}\geqq 0$．

よって $(1-x)^{n-1}f_n(x) \geqq 0$. $(0 \leqq x \leqq 1)$

この両辺を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で積分すると

$$\int_0^1 (1-x)^{n-1} f_n(x)\,dx \geqq 0$$

(ii) nが奇数のとき

$n \geqq 2$のとき $f_n(x) = \dfrac{1}{(2-x)^n} + \dfrac{1}{(2+x)^n} > 0$

よって(i)と同様に考えて.

$$\int_0^1 (1-x)^{n-1} f_n(x)\,dx \geqq 0$$

(i)(ii)より. $0 \leqq I_n$. が成り立つことが示された.

次に $I_n \leqq \frac{2}{n}$ を示す.

$$f_n(x) = \frac{1}{(2-x)^n} + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2+x)^n}$$

$$\leqq \frac{1}{(2-x)^n} + \frac{1}{(2+x)^n} < \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} < 2$$

$\therefore$ $(1-x)^{n-1} f_n(x) < 2(1-x)^{n-1}$

$$\int_0^1 (1-x)^{n-1} f_n(x)\,dx < 2\int_0^1 (1-x)^{n-1}\,dx = \frac{2}{n}$$

$\therefore$ $I_n \leqq \frac{2}{n}$.

$n=1$のとき.

$$I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\,dx = \log 3 < 2.$$

よって $0 \leqq I_n \leqq \frac{2}{n}$ が成り立つ

(4) $n=2k-1$ のとき $\quad I_{2k-1} = \dfrac{1}{2^{2k-2}(2k-1)} + I_{2k}$

$n=2k$ のとき $\quad I_{2k} = I_{2k+1}$

まとめると. $\quad I_{2k-1} = \dfrac{1}{4^{k-1}(2k-1)} + I_{2k+1}$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4^{k-1}(2k-1)} = \sum_{k=1}^{N} (I_{2k-1} - I_{2k+1})$$

$$= (I_1 - I_3) + (I_3 - I_5) + \cdots + (I_{2N-1} - I_{2N+1}) = I_1 - I_{2N-1}$$

ここで $\quad I_1 = \int_0^1 \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\,dx = \Big[-\log|2-x| + \log|2+x|\Big]_0^1 = \log 3$

だから $\quad I_1 - I_{2N-1}$ は

$$\log 3 - \frac{2}{2N-1} < I_1 - I_{2N-1} < \log 3 - 0$$

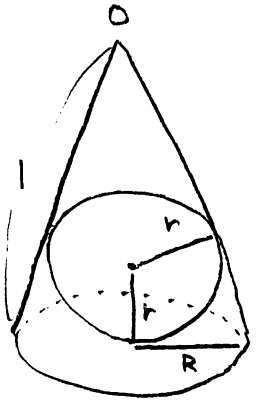
$\lim\limits_{N\to\infty}\left(\log 3 - \dfrac{2}{2N-1}\right) = \log 3$ だから、はさみうちの原理より

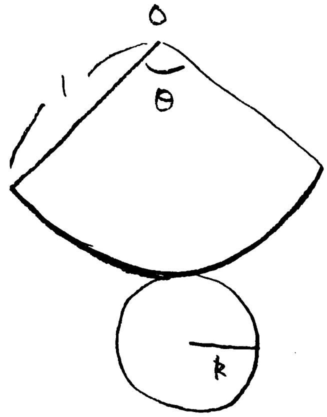
$$\lim_{N\to\infty}(I_1 - I_{2N-1}) = \log 3$$

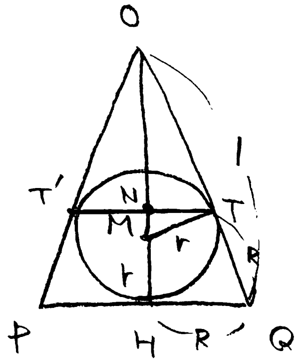
すなわち

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}(2k-1)} = \log 3$$ であることが示された

②







(1) 展開図より、扇形の太線部と底面の円の周囲の長さは等しい

$$1\times\theta = 2\pi R \qquad \therefore\ \underline{R = \frac{\theta}{2\pi}}$$

断面図より、 $\triangle OMT \backsim \triangle OQH$

$$OM : r : 1-R = 1 : R : OM+r$$

$$r = R\sqrt{\frac{1-R}{1+R}} = \underline{\frac{\theta}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi-\theta}{2\pi+\theta}}}$$

(2) (1)より $OM = \frac{r}{R}$

$OT : TQ = 1 : R$ より、 $NT = R\times(1-R)$

$$ON = (OM+r)\times(1-R)$$

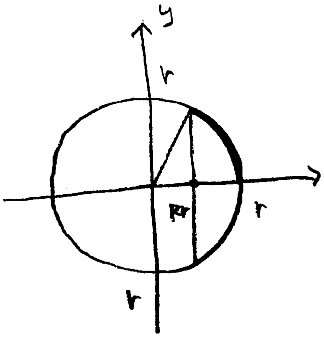
接点T, T'を含み、OHと垂直な平面より上側の体積(V_1とする)は

$$V_1 = \pi\left(R-R^2\right)^2\times\left(\frac{r}{R}+r\right)(1-R)\times\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2(1-R)^3\frac{(1+R)r}{R} = \frac{1}{3}\pi R(1-R)^3(1+R)R\sqrt{\frac{1-R}{1+R}}$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2(1-R)^3\sqrt{1-R^2}$$

$$MN = OM - ON = \frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R}+r\right)(1-R) = Rr$$



$x^2+y^2=r^2$ ($y \geqq 0$, $x \geqq Rr$) の部分を回転させたものと、$x=Rr$ で囲まれる図形の体積が、先の円すいから取り除くべき体積である（これを V_2 とする）

$$V_2=\int_{Rr}^{r}\pi y^2\,dx$$

$$=\int_{Rr}^{r}\pi(r^2-x^2)\,dx$$

$$=\left[\pi r^2x-\frac{1}{3}\pi x^3\right]_{Rr}^{r}$$

$$=\pi r^3-\frac{1}{3}\pi r^3-\pi r^3R+\frac{1}{3}\pi R^3r^3$$

$$=r^3\pi\left(\frac{2}{3}-R+\frac{1}{3}R^3\right)$$

$$=\pi R^3\left(\frac{1-R}{1+R}\right)\sqrt{\frac{1-R}{1+R}}\left(\frac{1}{3}R^3-R+\frac{2}{3}\right)$$

$$V=V_1-V_2=$$

③ (1) $g(x)=g(-x)$ となるので $g(x)$ は偶関数. $x>0$ について調べる

$$g(x) = -\frac{1}{2}\left||\log x+1| + \log x - 1\right|$$

(i) $x \geqq \frac{1}{e}$ のとき

$$g(x) = -\frac{1}{2}\left|\log x+1+\log x-1\right| = -|\log x| = \begin{cases} -\log x & (x \geqq 1) \\ \log x & (\frac{1}{e} \leqq x < 1) \end{cases}$$

(ii) $x < e$ のとき

$$g(x) = -\frac{1}{2}\left|-\log x-1+\log x-1\right| = -1$$

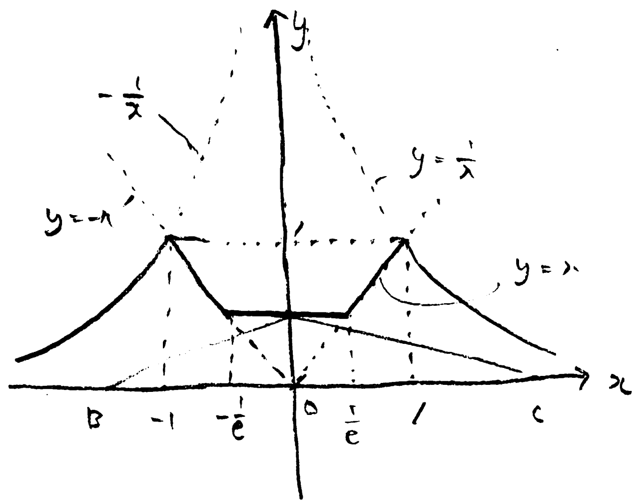
$f(x)$ も偶関数となり,

$x \geqq 1$ のとき $f(x) = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{e} \leqq x < 1$ のとき $f(x) = x$.

$0 \leqq x < \frac{1}{e}$ のとき $f(x) = \frac{1}{e}$

となるので $f(x)$ の概形は下のようになる



(2) $a=0$ のとき B は $x<0$, C は $x>0$ の領域にあるものとすると

AC が $y=\frac{1}{x}$ と接し, AB が $y=-\frac{1}{x}$ と接するときに面積が最大となる.

$y=\frac{1}{x}$ の $x=t$ における接線は $y'=-x^{-2}$ だから $y=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}$

これが $A(0, \frac{1}{e})$ を通るので $\frac{1}{e} = \frac{2}{t}$ $t=2e$.

このとき 接線は $y=-\frac{x}{4e^2}+\frac{1}{e}$ となり x軸との交点は

$x=4e$

よって B を $(-4e,0)$ C を $(0,4e)$ としたときが最大となり

$$S(0)=\frac{1}{2}\times(4e+4e)\times\frac{1}{e}=\underline{4}$$

(3) $f(x)$ は偶関数なので $x\geqq 0$ の範囲について考える

(i) $0<a<\frac{1}{e}$ のとき

$y=\frac{1}{x}$ の接線 $y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}$ が $(a,\frac{1}{e})$ を通るので

$$\frac{1}{e}=-\frac{1}{t^2}a+\frac{2}{t} \iff t^2-2et+ea=0 \iff t=e\pm\sqrt{e^2-ea}$$

$t>\frac{1}{e}$ だから $t=e+\sqrt{e^2-ea}$

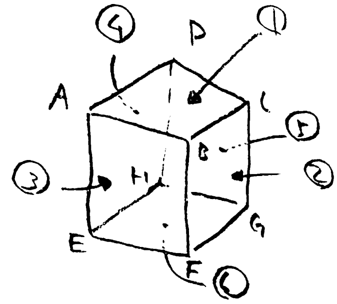
接線と x軸との交点は

④

(1) 1から10までの全ての和は55。

したがって、残る2枚の和が奇数であればよい

$$\frac{{}_5C_1 \times {}_5C_1}{{}_{10}C_2} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$



(2) 面に名前①~⑥をつける。

偶数になるものが3ならば、

奇数になるものも3。

各頂点の数をa, b, c… hとすると

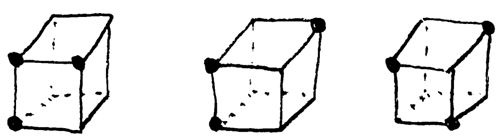
全ての面の数の和は、

3(a+b+… h)

となり、3つの面が偶数、3つの面が奇数だから

これが奇数となっている。すなわち、a+b+… h は奇数。

奇数3つを頂点に割り当てるとき、その割り当て方は



の3つあるが、このとき面の和を考えると、奇数になるものが必ず3つある。

奇数5つを割り当てたときも同じ。

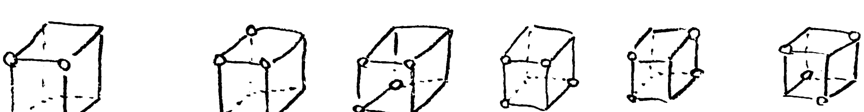
よって a+b+…+h が奇数であれば、偶数の面が3つとなる。

(1)より求める確率は

$$1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

(3) (2)より、このようなことは、4つの頂点が偶数のときに限られる

このとき、偶数の割り当て方は



(A) (B) (C) (D) (E) (F)

偶数面の数は

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)
6	0	2	4	6	6

4つの偶数が (A) のようになるのは $\dfrac{6}{{}_8C_4}$

(E) 〃 $\dfrac{6}{{}_8C_4}$

(F) 〃 $\dfrac{2}{{}_8C_4}$

$$\frac{5}{9} \times \left(\frac{6+6+2}{{}_8C_4} \right) = \frac{5}{9} \times \frac{\cancel{14}^{2} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot 5} = \frac{1}{9}$$

(4) (3) より

(B) のようになるのは $\dfrac{8}{{}_8C_4} = \dfrac{\cancel{8} \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5} = \dfrac{4}{35}$

$$\frac{\cancel{5}}{9} \times \frac{4}{\cancel{35}_{7}} = \frac{4}{63}$$