① (1) 最初の状態を ●○●○ とあらわす（左から順に 1, 2, 3, 4 の箱の意味）

●○●○ $\xrightarrow{\frac{1}{6}}$ ●●○○

●○●○ $\xrightarrow{\frac{2}{6}}$ ●○●○

●○●○ $\xrightarrow{\frac{1}{6}}$ ●○○●

●○●○ $\xrightarrow{\frac{1}{6}}$ ○●●○

○●○●

●○●○ $\xrightarrow{\frac{1}{6}}$ ○○●●

同じ状態になるのは
同色の玉の入った箱をえらぶので $\frac{2}{6}$

入れかわり（●○●○ → ○●○● などは不可能）

その他は $\frac{1}{6}$

ア　●○●○ → ●○●○ → ●○●○　　$\frac{2}{6} \times \frac{2}{6}$

●○●○ → (●●○○, ●○○●, ○●●○, ○○●●) → ●○●○　　$\frac{4}{6} \times \frac{1}{6}$

合計して　$\frac{8}{36} = \underline{\frac{2}{9}}$

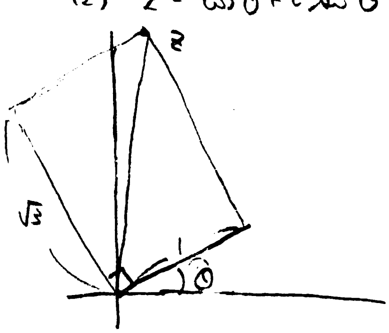
イ　●○●○ → ●○●○ → ●●○○　　$\frac{2}{6} \times \frac{1}{6}$

〃 → ●●○○ → ●●○○　　$\frac{1}{6} \times \frac{2}{6}$

〃 → ●○○●, ○●●○ → ●●○○　　$\frac{2}{6} \times \frac{1}{6}$

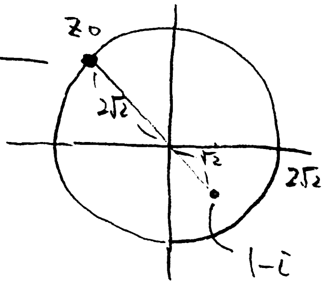
合計　$\frac{6}{36} = \underline{\frac{1}{6}}$

(2) $z = \cos\theta + i\sin\theta + \sqrt{3}\left(i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$



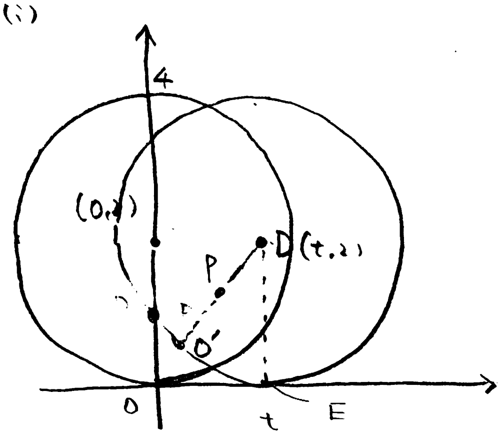
左図より，z は大きさ2，偏角 $\theta+\frac{\pi}{3}$

したがって $\sqrt{2}z$ は半径 $2\sqrt{2}$ の円周上を動く。



$|\sqrt{2}z - 1 + i|$ は点 $1-i$ と $\sqrt{2}z$ との距離なので最大となるのは z_0 のときで $\underline{3\sqrt{2}}$

② (1) (i)



円板と x 軸の接点をEとすると

すべることなく回転するので　OE = 弧O'E となるので

$$t = 2\pi \times 2 \times \frac{\angle PDE}{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \angle PDE = \frac{1}{2}t.$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \angle PDE\right) \\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \angle PDE\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\angle PDE \\ -\cos\angle PDE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\frac{t}{2} \\ -\cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = (x, y) = \underline{\left(t - \sin\frac{t}{2},\ 2 - \cos\frac{t}{2}\right)}$$

(ii) $\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2} > 0$　∴ x は単調に増加する

$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}$　∴ $2n\pi \leqq \frac{t}{2} \leqq 2n\pi + \pi$ のとき $\frac{dy}{dt} \geqq 0$

t	$\cdots$	$4n\pi$	$\cdots$	$4n\pi+2\pi$	$\cdots$	$4n\pi+4\pi$	$\cdots$
$\frac{dy}{dt}$		0	+	0	−	0	
y			↗		↘		

(2) lの法線ベクトルは $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ なのでlは

$$\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)\left(x-t+\sin\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\left(y-2+\cos\frac{t}{2}\right)=0$$

x軸と交わるとき $y=0$ となるので

$$\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)x = \sin\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}-\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)\left(-t+\sin\frac{t}{2}\right)$$

$$= +t-\frac{1}{2}t\cos\frac{t}{2}$$

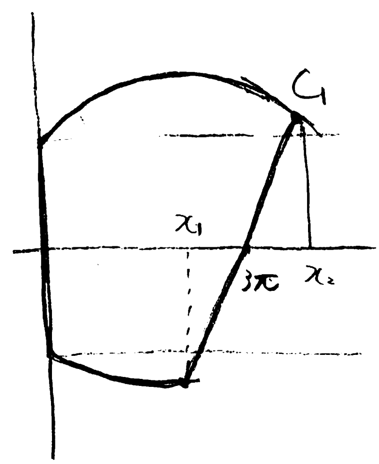
$$x = t. \qquad \therefore M(t, 0)$$

よってQは $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}$

$$= 2\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t-\sin\frac{t}{2} \\ 2-\cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+\sin\frac{t}{2} \\ -2+\cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{Q\left(t+\sin\frac{t}{2},\ -2+\cos\frac{t}{2}\right)}$$

(3) P, Qともにx座標は単調に増加する.



$$S = \int_0^{x_2} y\,dx + \int_0^{x_1} |y|\,dx + \triangledown - \triangle$$

$$= \int_0^{x_2} 2-\cos\frac{t}{2}\,dx + \int_0^{x_1} 2-\cos\frac{t}{2}\,dx$$

$$= \int_0^{3\pi}\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)dt$$

$$+ \int_0^{3\pi}\left(2-\cos\frac{t}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)dt$$

$$= \int_0^{3\pi}\left(4-2\cos\frac{t}{2}\right)dt = \left[4t-4\sin\frac{t}{2}\right]_0^{3\pi} = 12\pi+4$$

③ (1) $a = 2a'+1$ $(a' = 1, 2, 3 \dots)$ と表せる.

$x = 2x'-1$ とすると $(x' = 1, 2, 3 \dots)$

$$(2a'+1)(2x'-1) - 2y = 1$$

$$4a'x' + 2x' - 2a' - 1 - 2y = 1$$

$$y = 2a'x' + x' - a' - 1$$

$x' = a', a'+1, a'+2 \dots$ などとすることで y が定まるので, y は無数に存在する.

以上より, 組(x, y)は無数に存在することが示された.

(2) (x_n, y_n) は $ax-2y=1$ の解なので $ax_n - 2y_n = 1$

$$y_n = \frac{ax_n - 1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} + \dots + \frac{y_n}{x_n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{ax_1-1}{2x_1} + \frac{ax_2-1}{x_2} + \dots + \frac{ax_n-1}{x_n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{a}{2}n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)\right) \quad \dots (*)$$

ここで $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = S$ とする.

$x_1 \sim x_n$ のうちで最小の値と最大の値を m, M とする.

$x_1 \sim x_n$ は全て整数なので. $1 \leqq m.$ $, M \geqq n$

$\frac{1}{x}$ のグラフは単調に減少するので

$$S = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \leqq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leqq 1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx$$

$$= 1 + \log n$$

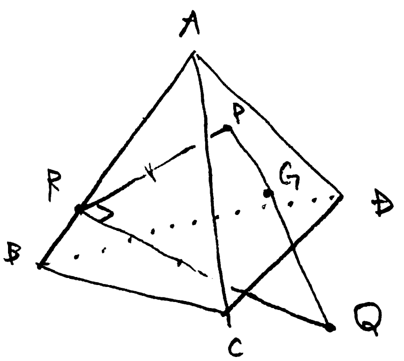
$$\lim_{n\to\infty} \frac{S}{n} \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{1+\log n}{n} = 0 \quad \left(\because \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0\right)$$

$S \geqq 0$ とあわせ、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \to \infty} S = 0.$$

$\therefore \ (*) = \dfrac{a}{2}$ //

④ $\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{AC}=\vec{c}$, $\vec{AD}=\vec{d}$ とする



$\vec{AP}=\frac{1}{8}\vec{b},+\frac{1}{4}\vec{d}.$

$\vec{AG}=\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}.$

QはPG上にあるので

$\vec{AQ}=\vec{AP}+k\vec{PG}$

$=(1-k)(\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d})+k(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d})$

$=\frac{1}{8}(1-k)\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}+(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}k+\frac{1}{3}k)\vec{d}$

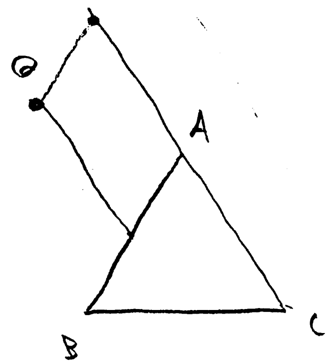
QはABC上にあるので　$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}k+\frac{1}{3}k=0$　$k=-3$

$\therefore\ \vec{AQ}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

$\vec{AR}=t\vec{AB}$ とすると

$\vec{RP}=\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}-t\vec{b}$

$\vec{RQ}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}-t\vec{b}.$



$\vec{RP}\cdot\vec{RQ}=0$ より

$(\vec{b}+2\vec{d}-8t\vec{b})\cdot(\vec{b}-2\vec{c}-2t\vec{b})$

$=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}-2t|\vec{b}|^2$

$\quad+2\vec{b}\cdot\vec{d}-4\vec{c}\cdot\vec{d}-4t\vec{b}\cdot\vec{d}$

$\quad-8t|\vec{b}|^2+16t\vec{b}\cdot\vec{c}+16t^2|\vec{b}|^2 \cdots (*)$

1辺の長さを l とすると, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=l$, $\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=l\cdot l\times\cos 60^\circ$

$=\frac{1}{2}l^2$

$(*)=l^2-l^2-2tl^2+l^2-2l^2-2tl^2-8tl^2+8tl^2+16t^2l^2=0$

$\Leftrightarrow\quad -2t+1-2-2t-\cancel{8t}+\cancel{8t}+16t^2=0$

$\Leftrightarrow\quad 16t^2-4t-1=0$

$t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{8}$

Rは AB上にあるので　$t=\frac{1+\sqrt{5}}{8}$　$\therefore\ \frac{AR}{AB}=t=\frac{1+\sqrt{5}}{8}$