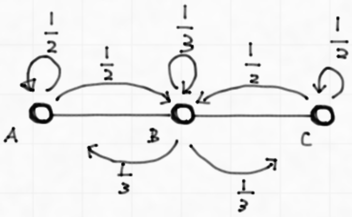
2019 滋賀医科大学



1

(1) 右の遷移図より

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n & \cdots ② \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{3}b_n & \cdots ③ \end{cases}$$

(2) ①+③　$a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n) + \frac{2}{3}b_n$

ここに $a_{n+1} + c_{n+1} = 1 - b_{n+1}$ および $a_n + c_n = 1 - b_n$ を代入

$$1 - b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n) + \frac{2}{3}b_n$$

$$b_{n+1} = -\frac{1}{6}b_n + \frac{1}{2}$$

$$b_{n+1} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6}\left(b_n - \frac{3}{7}\right)$$

これは $\left\{b_n - \frac{3}{7}\right\}$ が初項 $b_1 - \frac{3}{7}$，公比 $-\frac{1}{6}$ の等比数列であることを示している．$b_1 = \frac{1}{2}$ だから

$$b_n - \frac{3}{7} = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ b_n = \mathbf{\frac{1}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{7}}$$

(3) ①に (2) の結果を代入

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{42}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{7}$$

両辺に 2^{n+1} をかけて

$$2^{n+1}a_{n+1} = 2^n a_n + \frac{2}{21}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{2^{n+1}}{7}$$

よって　$p_{n+1} = p_n - \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2^{n+1}}{7}$

$\{p_n\}$ の階差数列が $\left\{-\frac{2}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2^{n+1}}{7}\right\}$ となるので

$n \geqq 2$ のとき

$$p_n = p_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\frac{2}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{2^{k+1}}{7}\right\} = a_1 \times 2 + \frac{4}{7} \times \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + \frac{2}{21} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2^{n+1}}{7} - \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

上式で $n = 1$ とすると $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{7} - \frac{1}{14} = 1$　これは $a_1 \times 2$ と同じ値なので上式は $n = 1$ でも成り立つ

よって　$p_n = \mathbf{\frac{1}{2} + \frac{2^{n+1}}{7} - \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$

(4) $\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty}\left\{\frac{3}{7} + \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\} = \mathbf{\frac{3}{7}}$

$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{2^n} = \lim_{n \to \infty}\left\{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2}{7} - \frac{1}{28}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\} = \mathbf{\frac{2}{7}}$

$\lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{n \to \infty}(1 - a_n - b_n) = 1 - \frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \mathbf{\frac{2}{7}}$

2 (1) $(z-\alpha_1)\times(z-\alpha_2)\times\cdots\times(z-\alpha_k) = (z-\beta_1)\times(z-\beta_2)\times\cdots\times(z-\beta_l) \quad \cdots (*)$

(*)は zについての恒等式で (*)の左辺がk次式なら右辺もk次式

したがって $k=l$ である.

ここで、$f(z)=(z-\alpha_1)\times(z-\alpha_2)\times\cdots\times(z-\alpha_k)$

とおくと. $f(z)=0$ は zのk次方程式で $f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=\cdots=f(\alpha_k)=0$ より.

このk次方程式の解は $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ で、k次方程式の解は最大k個であることと、$\alpha_1\sim\alpha_k$が全て異なることから. これらの値以外に解は存在しない.

ところで (*) より $f(z)$は $(z-\beta_1)\times(z-\beta_2)\times\cdots\times(z-\beta_k)$ とも表せるので

$(z-\beta_1)\times(z-\beta_2)\times\cdots\times(z-\beta_k)=0$ は $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_k$ を解にもつことになる.

$z=\alpha_1$を代入すると $(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\cdots(\alpha_1-\beta_k)=0$ が成り立ち. これは α_1が $\{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_k\}$の要素であることを示している. $\alpha_2\sim\alpha_k$も同様で全て $\{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_k\}$の要素である.

$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_k$も全て異なっていることと要素の数が同じ$k$個であることから. 集合 $\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_k\}$ と $\{\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_k\}$ は同じものであることが分かる

証明終

(2) $z^n=1$ より $|z^n|=|z|^n=1$ だから $|z|=1$

したがって zを $z=\cos\theta+i\sin\theta$ と表すことができ.

$$z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta=1 \text{より}$$

$$n\theta=2\pi\times k \quad (k\text{は整数})$$

$k=1$のもの、すなわち $\theta=\frac{2\pi}{n}$ のものを ωとする $\left(\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$と.

$\omega^1,\omega^2,\omega^3,\ldots\omega^n$ は全て異なり. また $(\omega^l)^n=\omega^{nl}=1^l=1$ だから全て $z^n=1$の解となっている

以上より $z^n=1$の解は $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ とすると. $\omega^k\ (k=1,2,\ldots n)$ である.

(3) mがnの約数であるとき $n=km$ を満たす自然数kが存在する.

(2)より. $z^m=1$を満たすzはある複素数ωを用いて $\omega^l\ (l=1,2,\ldots m)$ と表すことができ、$(\omega^l)^m=1$ が成り立つが. このとき.

$$(\omega^l)^n=(\omega^l)^{km}=(\omega^l)^{m^k}=1^k=1$$

だから. $\omega,\omega^2,\cdots\omega^m$ は $z^n=1$の解となっている

次に. $z^m=1$ の任意の解が $z^n=1$の解となっているときについて考える.

$z^m=1$の解はある複素数ωを用いて $\omega^l\ (l=1,2,\ldots m)$ と表すことができ、これらは全て$z^n=1$の解

仮に $n=pm+r$ (p,rは整数, $0<r<m$ とする) が成り立つと仮定する. ω^1もz^nの解なので.

$$\omega^{1^n}=\omega^{pm+r}=\omega^{m^p}\cdot\omega^r=1^p\cdot\omega^r=\omega^r=1$$

ここで ω^rについて. $0<r<m$のとき. ω^rは$z^m=1$の解で. かつ $\omega^m=1\neq\omega^r$

よって nをmで割った余りは0であり. mはnの約数. 以上より題意は示された.

3

(1) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ ， $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

OGを3:1に内分する点は　$\frac{3}{4}\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

CHを3:1に内分する点は　$\frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OH} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

2点は一致しており．これは．OGとCHが交わることを意味する．

(2) (1)より　$\overrightarrow{OI} = \mathbf{\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}$

(3) OI = CI より　$\left|\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\right|^2 = \left|\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OC}\right|^2$

$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}|^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OC}|^2 = \overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdots ①$

同様に　OI = BIより　$|\overrightarrow{OB}|^2 = \overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) \ldots ②$

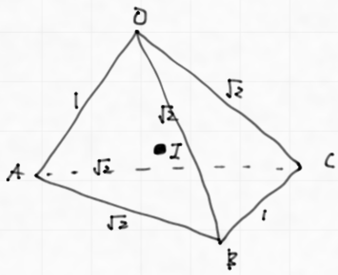
OI = AIより　$|\overrightarrow{OA}|^2 = \overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \ldots ③$

$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 - 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OB}|^2 = \overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) - 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$　(∵ ①②)

$= \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = |\overrightarrow{OA}|^2$　(∵ ③)

∴　OA = BC

OB = CA ，OC = AB も同様



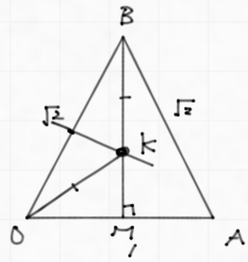
(4) 条件より Iは四面体OABCの外接球の中心.

IからOABに下ろした垂線の足をKとすると

△OIK ≡ △AIK ≡ △BIK　(∵ OI = AI = BI，IK ⊥ OAB，IKは共通)

だから OK = AK = BK であり．Kは△ABCの外心

BO = BA = $\sqrt{2}$ なので．△OBAは二等辺三角形で　OAの中点をMとすると OA⊥MB で．KはBM上にある．



$BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ，$\cos\angle OBM = \frac{BM}{OB} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

$BK = \frac{1}{2}OB \times \frac{1}{\cos\angle OBM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$　$KM = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{3}{14}\sqrt{7}$

$\overrightarrow{OK} = \frac{BK}{BM}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right) + \frac{KM}{BM}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$

$|\overrightarrow{OA}| = 1$．$|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{2}$ ，①.②③ より　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}$．$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}$．$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OI} = \frac{2}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{28}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{28}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$

$|28\overrightarrow{IK}|^2 = |\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} - 7\overrightarrow{OC}|^2 = 1 + 50 + 98 + 5 - 7 - 105 = 42$

∴　$|\overrightarrow{IK}| = \frac{\sqrt{42}}{28}$

したがって Iを中心とした半径 $\mathbf{\frac{\sqrt{42}}{28}}$ の球は平面OABと接し、これが題意の球の半径である

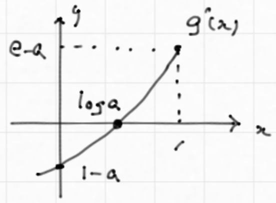
4 (1) $g(x) = e^x - (ax+b)$ とおく．

$0 \leqq x \leqq 1$ で $y = e^x$ と $y = ax+b$ が異なる2点で交わるとき，$g(x) = 0$ は $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で異なる2つの実数解をもつ．

$g'(x) = e^x - a$ なので $a \leqq 0$ とすれば $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $g'(x)$ は常に正となり，$g(x)$ のグラフは $0 \leqq x \leqq 1$ で単調に増加する．そのようなグラフが x 軸と2点で交わることはない．よって $a > 0$ が成り立つ．

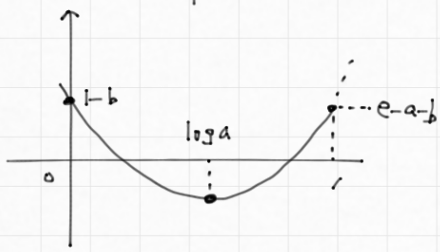
(2) (1)より $a>0$．$g'(x) = 0$ が $0<x<1$ で解を持たないとき，$g(x)$ は単調に増加または減少するので，$g'(x) = 0$ は $0<x<1$ で解を持つので $e^0 < e^a < e^1$ であり，

$g'(x) = e^x - a = 0$ より $x = \log a$



$g(x)$ のグラフの増減は次のようになる

x	0	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$	1
$g'(x)$	$1-a$	$-$	0	$+$	$e-a$
$g(x)$	$1-b$	↘		↗	$e-a-b$

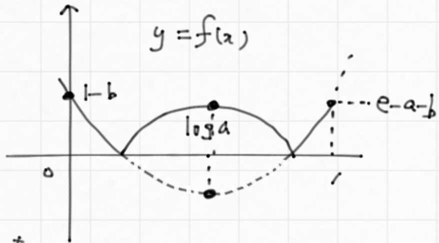


$g(x)$ が $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で x 軸と異なる2点で交わるための条件は

$g(0) = 1-b \geqq 0$

$g(1) = e-a-b \geqq 0$

$g(\log a) = a - a\log a - b < 0 \quad \Leftrightarrow \quad b > a(1-\log a)$



ここで，(1)より $a>0$ であり，$0 < \log a < 1$ だから

$b > a(1-\log a) > 0$ 　以上より $b>0$ が示された．

(3) $y = f(x)$ のグラフの概形は右上のようになっており，$f(x)$ を最大にする x が3つ存在するのは，

$g(0) = g(1) = -g(\log a)$ が成り立つときである．

条件を整理する　$1-b = e-a-b = -a + a\log a + b$

$a = \mathbf{e-1}$ 　$b = \frac{1}{2}\left(e - (e-1)\log(e-1)\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}e + \frac{1-e}{2}\log(e-1)}$

(4) 右辺−左辺 $= \int_0^1 (ax+b)\,dx - \int_0^1 e^x\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}ax^2 + bx\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = \frac{1}{2}a + b - e + 1$

$= \frac{1}{2}(e-1) + \frac{1}{2}e + \frac{1-e}{2}\log(e-1) - e + 1 = \frac{1-e}{2}\log(e-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left((1-e)\log(e-1) + 1\right)$ …(*)

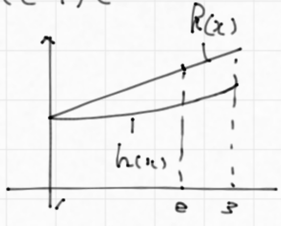
$(1-e)\log(e-1) + 1 \geqq 0$ を示す．$1-e<0$ なので

$(1-e)\log(e-1) + 1 \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (e-1)\log(e-1) \leqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad e\log(e-1) \leqq 1 + \log(e-1)$

$\Leftrightarrow (e-1)^e \leqq (e-1)e$

ここで $h(x) = (e-1)^x$，$k(x) = (e-1)x$ とおくと．

$y = h(x)$ のグラフは下に凸であり，グラフは右のようになる



$2.71 < e < 2.72$ だから $(e-1)^2 < 1.72^2 < 2.96 < 3$．

$(e-1)^3 \leqq (e-1)\cdot 3 \quad \therefore\ h(3) \leqq k(3) \quad \therefore\ h(e) \leqq k(e)$

よって，(*)が成り立つことが示された．