②

(1) 円の中心と直線との距離が半径よりも小さければよい.

$$\frac{|0+2\times 0-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}<1 \iff |k|<\sqrt{5}$$

$$\iff -\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$$

(2) P, Qを通る円は

$$x^2+y^2-1+\alpha(x+2y-k)=0$$

と表すことができる。

この式を整理すると

$$\left(x+\frac{1}{2}\alpha\right)^2+(y+\alpha)^2=k\alpha-\frac{5}{4}\alpha^2+1$$

この円の中心は $\left(-\frac{1}{2}\alpha, -\alpha\right)$ と表せるが, これを (X, Y) とすると,

$$X=-\frac{1}{2}\alpha,\quad Y=-\alpha$$

α を消去して,

$$Y=2X$$

よって 2点P, Qを通る円の中心は $y=2x$ 上に存在する。

(3) (2)で $\alpha=-2a$ とすればよいので, 円は,

$$(x-a)^2+(y-2a)^2=-2ka-5a^2+1$$

となる。この円の半径が r なので,

$$\underline{r^2=-2ka+5a^2+1}$$

(4) (3)の円がR(2, 1)を通るので,

$$(2-a)^2+(1-2a)^2=-2ka+5a^2+1$$

$$4-8a+2ka=0$$

$$a=\frac{2}{4-k}$$

(1)より $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ なので, $\frac{2}{4+\sqrt{5}}<a<\frac{2}{4-\sqrt{5}}$

よって円の中心の x 座標の範囲は

$$\underline{\frac{2}{4+\sqrt{5}}<x<\frac{2}{4-\sqrt{5}}}$$

③ (1) $\sum_{k=1}^{10}(2k)^2 = 4\sum_{k=1}^{10}k^2 = \overset{2}{\cancel{4}}\times\frac{1}{\cancel{6}}\times 10\times 11\times \overset{7}{\cancel{21}} = 1540$

$$\sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2 = 4\sum_{k=1}^{10}k^2 + \sum_{k=1}^{10}(1-4k)$$

$$= 1540 - \frac{1}{2}(-3-39)\times 10 = 1330$$

(2) $a_n = \sum_{k=1}^{n}(2k)^2 = \underline{\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)}$

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}(1-4+1-4n)n$$

$$= \frac{1}{6}n(2n+1)\big(4(n+1)-6\big) = \underline{\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)}$$

(3) $\frac{1}{a_n} - \frac{3}{2n(2n+1)} = \frac{3}{2n(n+1)(2n+1)} - \frac{3}{2n(2n+1)}$

$$= \frac{3}{2n(2n+1)}\left(\frac{1}{n+1}-1\right) = \underline{\frac{-3}{2(2n+1)(n+1)}}$$

$$\frac{1}{b_n} + \frac{3}{2n(2n+1)} = \frac{3}{n(2n+1)(2n-1)} + \frac{3}{2n(2n+1)}$$

$$= \frac{3}{2n(2n+1)} \times \left(2 + \frac{1}{2n-1}\right) = \underline{\frac{3}{2n(2n-1)}}$$

(4) $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{-3}{2(2n+1)(n+1)} + \cancel{\frac{3}{2n(2n+1)}} + \frac{3}{2n(2n-1)} - \cancel{\frac{3}{2n(2n+1)}}\right\}$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{-1}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{2n(2n-1)}\right\}$$

$$= 3\left(\cancel{\frac{-1}{2\cdot2\cdot3}} + \frac{+1}{2\cdot1\cdot1}\right) + 3\left(\cancel{\frac{-1}{2\cdot3\cdot5}} + \cancel{\frac{1}{2\cdot2\cdot3}}\right) + 3\left(\cancel{\frac{-1}{2\cdot4\cdot7}} + \cancel{\frac{1}{2\cdot3\cdot5}}\right) + \cdots$$

$$\cdots + 3\left(\frac{-1}{2(n+1)(2n+1)} + \cancel{\frac{1}{2n(2n-1)}}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{3n(2n+3)}{2(n+1)(2n+1)}$$

④ (1) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

Pにおける接線は　$y = \dfrac{1}{t}(x-t) + \log t$.

$\Leftrightarrow \underline{y = \dfrac{1}{t}x + \log t - 1}$ //

(2) lの式に$x=0$を代入

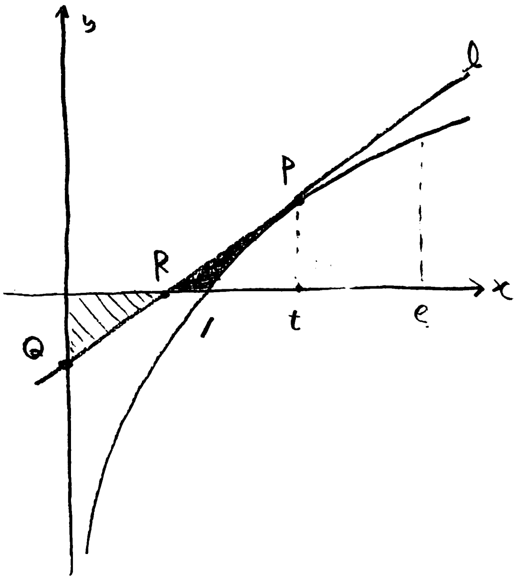
$y = \log t - 1$

$\therefore P(0, \log t - 1)$

lの式に$y=0$を代入

$x = t - t\log t$

$\therefore R(t - t\log t, 0)$



(3) $S_1(t) = \dfrac{1}{2} OR \times OQ$

$= \dfrac{1}{2} |\log t - 1| \times |t - t\log t|$

$= \dfrac{t}{2} |\log t - 1|^2 = \underline{\dfrac{t}{2}(\log t - 1)^2}$ //

$S_2(t) = \displaystyle\int_{t - t\log t}^{t} \frac{1}{t}x + \log t - 1 \, dx - \int_1^t \log x \, dx$

$= \dfrac{1}{2} \times t\log t \times \log t - [x\log x - x]_1^t$

$= \underline{\dfrac{1}{2}t(\log t)^2 - t\log t + t - 1}$ //

(4) $S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \dfrac{t}{2}(\log t - 1)^2 + \dfrac{1}{2}t(\log t)^2 - t\log t + t - 1$

$= t(\log t)^2 - 2t\log t + \dfrac{3}{2}t - 1$

$S'(t) = (\log t)^2 + 2\log t - 2\log t - 2 + \dfrac{3}{2}$

$= (\log t)^2 - \dfrac{1}{2}$

$S'(t) = 0$となるのは $(\log t)^2 = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$\log t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

のときで、$S(t)$の増減は次のようになる　　$\Leftrightarrow t = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\cdots$	e
$S'(t)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	$\frac{1}{2}$
$S(t)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{e}{2}-1$

よって $S(t)$ は $t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ のとき極小かつ最小となる

$$S(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1$$

$$= \underline{(2-\sqrt{2})e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 1}$$ //

⑥ (1) $f'(x)=-\frac{1}{2}\sin x$, $g'(x)=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$

(p, q) において $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が接するので、

$$\begin{cases} f(p)=g(p)=q \\ f'(p)=g'(p) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\cos p=\cos\frac{p}{2}+c=q & \cdots ① \\ -\frac{1}{2}\sin p=-\frac{1}{2}\sin\frac{p}{2} & \cdots ② \end{cases}$$

② より $2\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}=\sin\frac{p}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{p}{2}\left(2\cos\frac{p}{2}-1\right)=0$.

$0<x\leqq\pi$ において、接するためには $0<p\leqq\pi$ の範囲で上式が成り立つ必要がある。$0<p\leqq\pi$ のとき $\sin\frac{p}{2}\neq 0$ なので、

$\cos\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$

$\frac{p}{2}=\frac{\pi}{3}$ $\therefore p=\frac{2}{3}\pi$

このとき ① より

$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+c=q$

よって、$q=-\frac{1}{4}$, $c=-\frac{3}{4}$.

以上より $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が接するのは $c=-\frac{3}{4}$ のときで、その接点は $(p, q)=\left(\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{4}\right)$ である。

また、このとき、$f(x)-g(x)=h(x)$ として、

$f'(x)-g'(x)=-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\left(1-2\cos\frac{x}{2}\right)$

となるので $h(x)$ の増減は次のようになる

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

よって $[0, \pi]$ において $h(x) \geqq 0$.

したがって. $[0, \pi]$ において. $g(x) \leqq f(x)$.

(2)
$$V = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} 2\pi x \cdot (f(x) - g(x))\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{2}{3}\pi} x \left(\frac{1}{2}\cos x - \cos\frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right) dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x}{2}\sin x - \frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} \right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$- 2\pi \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\, dx$$

$$+ 2\pi \times \frac{3}{4} \times \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \underline{\frac{1}{3}\pi^3 - \sqrt{3}\pi^2 + \frac{5}{2}\pi.}$$