①

(1) $f(0)=a^5>0$ なので $f(x)=0$ の両辺を x^2 で割ると

$$\frac{f(x)}{x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{(x^2+a)(x-a^2)^2}{x^2}=c$$

上式左辺を $g(x)$ とおく

$$g(x)=\frac{(x^2+a)(x-a^2)^2}{x^2}$$

微分して

$$g'(x)=\frac{2(x-a^2)(x^3+a^3)}{x^3}=\frac{2(x-a^2)(x+a)(x^2-ax+a^2)}{x^3}$$

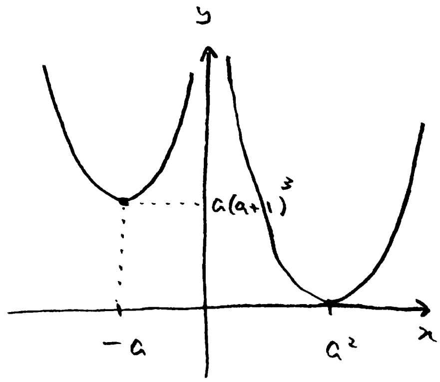
$g'(x)=0$ となるのは $x=a^2, -a$.

$g(x)$ の増減、およびグラフは右のとおり

x	…	$-a$	…	0	…	a^2	…
g'	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
g	↘		↗		↘	0	↗

$$g(-a)=\frac{a(a+1)(a+a^2)^2}{a^2}=a(a+1)^3$$

$$g(a^2)=0$$



$y=g(x)$ のグラフと $y=c$ のグラフの交点の数が $f(x)=0$ の解の数と一致するので

$$\begin{cases} c<0 \text{ のとき} & 0\text{個} \\ c=0 \quad〃 & 1\text{個} \\ 0<c<a(1+a)^3 \text{ のとき} & 2\text{個} \\ c=a(1+a)^3 \text{ のとき} & 3\text{個} \\ c>a(1+a)^3 \text{ のとき} & 4\text{個} \end{cases}$$

(2) $f(x)=0$ が3つの解をもつのは $c=a(1+a)^3$ のとき.

(このとき $f(x)$ は $x=-a$ を重解にもつ)

$$(x^2+a)(x-a^2)^2-a(1+a)^3x^2=0$$

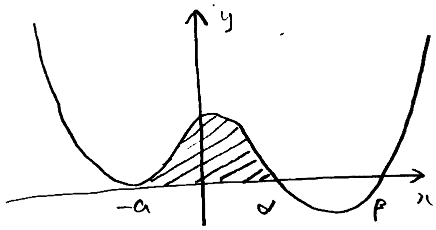
$$\Leftrightarrow (x+a)^2\{x^2-2a(a+1)x+a^3\}=0$$

$$x=-a,\ a(a+1)\pm a\sqrt{a^2+a+1}$$

(3) $\alpha = a^2+a - a\sqrt{a^2+a+1}$

$\beta = a^2+a + a\sqrt{a^2+a+1}$

とする。f(x)は4次係数が正の4次関数で、$x=-a$を重解、また$x=\alpha,\beta$を解にもつので、グラフは右のようになり、もとめる面積は、右図の斜線部。よってS(a)は



$$S(a) = \int_{-a}^{\alpha} (x+a)^2(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$x+a=t$とおく

$$S(a) = \int_0^{\alpha+a} t^2(t-a-\alpha)(t-a-\beta)\,dx$$

$$= \int_0^{\alpha+a} t^4 - (2a+\alpha+\beta)t^3 + (a+\alpha)(\alpha+\beta)t^2\,dt$$

$$= \left[\frac{t^5}{5} - \frac{2a+\alpha+\beta}{4}t^4 + \frac{(a+\alpha)(a+\beta)}{3}t^3\right]_0^{a+\alpha}$$

$$= \frac{1}{60}(a+\alpha)^4\{12(a+\alpha) - 15(2a+\alpha+\beta) + 20(\alpha+\beta)\}$$

$$= \frac{1}{60}(a+\alpha)^4(2a-3\alpha+5\beta)$$

$$\lim_{a\to+0}\frac{S(a)}{a^5} = \lim_{a\to+0}\frac{1}{60}\left(1+\frac{\alpha}{a}\right)^4\left(2-3\frac{\alpha}{a}+5\frac{\beta}{a}\right)$$

ここで $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{\alpha}{a} = \lim_{a\to+0}\left(a+1-\sqrt{a^2+a+1}\right) = 0$

$$\lim_{a\to+0}\frac{\beta}{a} = \lim_{a\to+0}\left(a+1+\sqrt{a^2+a+1}\right) = 2$$

だから

$$\lim_{a\to+0}\frac{S(a)}{a^5} = \frac{1}{60}\times(1+0)^4(2-3\times0+5\times2)$$

$$= \frac{12}{60} = \underline{\frac{1}{5}}\ //$$

②

(1) n回目に白玉が取り出される確率は q_n

このとき白玉が追加される確率は p.

またn回目に赤玉がとり出され $(1-q_n)$、このとき白玉が追加される確率は $1-p$

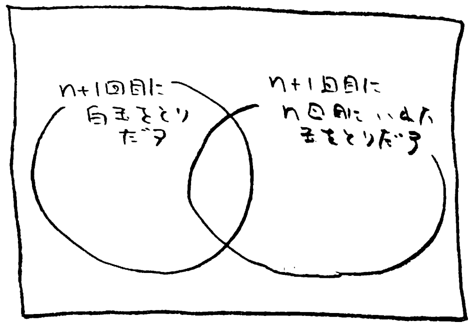
n+1回目は、4+n個の玉から n回目に追加された白玉をとり出すので

$$\{p q_n + (1-p)(1-q_n)\} \times \frac{1}{n+4}$$

$$= \underline{\frac{2pq_n - p - q_n + 1}{n+4}}$$

(2) n+1回目にn回目に入れた玉をとり出す確率は

$$\frac{1}{n+4}$$



n+1回目にn回目に入れた玉をとり出さないという条件の下で、白玉をとり出す確率が q_n と等しいので

$$q_n = \frac{q_{n+1} - \frac{2pq_n - q_n - p + 1}{n+4}}{1 - \frac{1}{n+4}}$$

$$\Leftrightarrow \quad q_{n+1} = \frac{n+3}{n+4} q_n + \frac{(2p-1)q_n - p + 1}{n+4}$$

$$\Leftrightarrow \quad q_{n+1} = \frac{(n+2p+2)q_n - p + 1}{n+4}$$

(3)

$r_n = q_n - \frac{1}{2}$, $r_{n+1} = q_{n+1} - \frac{1}{2}$ を上式に代入

$$r_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{(n+2p+2)}{n+4}\left(r_n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1-p}{n+4}$$

$$r_{n+1} = \frac{n+2p+2}{n+4} r_n + \frac{\frac{1}{2}n + p + 1 + 1 - p - \frac{1}{2}n - 2}{n+4}$$

$$\underline{r_{n+1} = \frac{n+2p+2}{n+4} r_n}$$

(4) $p=0$ のとき、 $r_{n+1} = \frac{n+2}{n+4} r_n$

$$r_n = \frac{n+1}{n+3} r_{n-1} = \frac{n+1}{n+3} \times \frac{n}{n+2} r_{n-2} = \frac{n+1}{n+3} \times \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{n+1} r_{n-3}$$

$$= \frac{\cancel{n+1}}{n+3} \times \frac{\cancel{n}}{n+2} \times \frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n+1}} \times \cdots \times \frac{4}{\cancel{6}} \times \frac{3}{\cancel{5}} r_1 = \frac{12}{(n+3)(n+1)}\left(q_1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{(n+3)(n+1)}$$

$$q_n = r_n + \frac{1}{2} = \underline{\frac{n^2+5n}{2(n+3)(n+1)}}$$

$p=\frac{1}{2}$ のとき

$$r_{n+1} = \frac{n+3}{n+4} r_n$$

$$r_n = \frac{n+2}{n+3} r_{n-1} = \frac{n+2}{n+3} \times \frac{n+1}{n+2} r_{n-2} = \cdots = \frac{\cancel{n+2}}{n+3} \times \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n+2}} \times \cdots \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{6}} \times \frac{4}{\cancel{5}} r_1$$

$$q_n - \frac{1}{2} = \frac{4}{n+3}\left(q_1 - \frac{1}{2}\right)$$

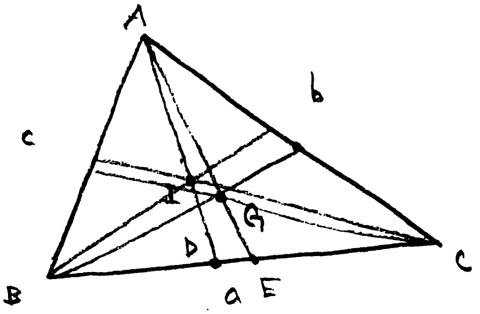
$$q_n = \frac{-1}{n+3} + \frac{1}{2} = \underline{\frac{n+1}{2(n+3)}}$$

$p=1$ のとき.

$$r_{n+1} = r_n = \cdots = r_1$$

$$q_n = q_1 = \underline{\frac{1}{4}}$$

③



(1) ADは∠BACの二等分線なので

$BD : DC = c : b$.

$\therefore BD = \dfrac{c}{b+c} \times a = \underline{\dfrac{ac}{b+c}}$

(2) BIは∠ABDの二等分線なので

$AI : ID = BA : BD = c : \dfrac{ac}{b+c} = \underline{b+c : a}$

(3) 三角形ABCの面積をUとする.

AGとBCの交点をEとすると、Gは△ABCの重心なので

$AG : GE = 2 : 1$.

よって $\triangle BGC = \frac{1}{3}\triangle ABC$ となり $S = \frac{1}{3}U$

また(2)より $\triangle BIC = \dfrac{a}{a+b+c}\triangle ABC$

$\therefore \quad T = aU$

$\therefore \quad \dfrac{T}{S} = \dfrac{aU}{\frac{1}{3}U} = \underline{3a}$

(4) 三角形の成立条件より

$c-b < a < b+c$

$a<b+c$ および $a+b+c=1$ より $a < 1-a \iff a < \frac{1}{2}$

$c-b<a$ および $a+b+c=1$ より $1-a-b-b < a \iff 2a > 1-2b$.

ここで $b<a$ なので $a > \frac{1}{2}-b > \frac{1}{2}-a \iff a > \frac{1}{4}$

まとめると $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$.

$\therefore \quad \underline{\frac{3}{4} < \frac{T}{S} < \frac{3}{2}}$

④ (1)

(i) $\int t\sin t\,dt = \sin t - t\cos t + C$

(ii) $\int t^2\cos t\,dt = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t + C$ 　（Cはいずれも積分定数）

(2) $\angle AOP = \frac{\pi}{2} - \theta = \angle APO$ $(\because AO = AP)$

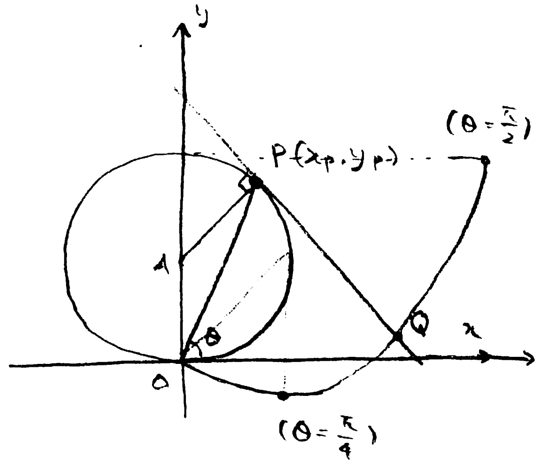
$\angle OAP = \pi - \angle AOP - \angle APO = 2\theta$

$\overrightarrow{AP}$の偏角は $2\theta - \frac{\pi}{2}$, 大きさは 1

$\therefore \overrightarrow{AP} = \left(\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= (\sin 2\theta, -\cos 2\theta)$

$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = (\sin 2\theta, 1-\cos 2\theta)$



$P(\sin 2\theta, 1-\cos 2\theta)$

(3) 劣弧OPの長さは $\angle OAP = 2\theta$ なので 2θ

$\overrightarrow{PQ}$の偏角は $\overrightarrow{AP}$の偏角より $\frac{\pi}{2}$ 小さいので $2\theta - \pi$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = 2\theta\begin{pmatrix}\cos(2\theta-\pi)\\ \sin(2\theta-\pi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\theta\cos 2\theta\\ -2\theta\sin 2\theta\end{pmatrix}$

$\therefore \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} = (\sin 2\theta - 2\theta\cos 2\theta, 1-\cos 2\theta - 2\theta\sin 2\theta)$

(4) $\frac{dy_Q}{d\theta} = 2\sin 2\theta - 2\sin 2\theta - 4\theta\cos 2\theta = -4\theta\cos 2\theta$

$\frac{dy_Q}{d\theta} = 0$ となるのは $\theta = 0, \frac{\pi}{4}$

y_Q の増減は

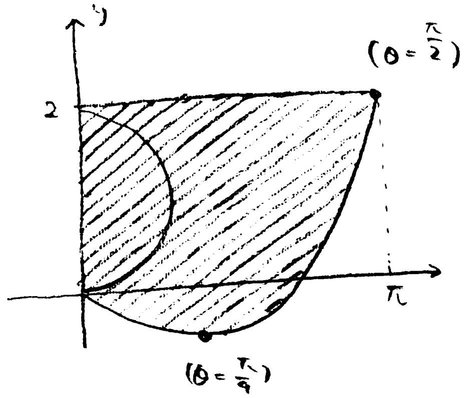
θ	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dy_Q}{d\theta}$	0	−	0	+	2π
y_Q	0	↘		↗	

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $y_Q = 1 - 0 - \frac{\pi}{2}\times 1 = 1 - \frac{\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $y_Q = 1 + 1 - \pi \times 0 = 2$

$\therefore$ y_Q は $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最小値 $1 - \frac{\pi}{2}$,

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 2 　をとる



(5) $\dfrac{dx_q}{d\theta} = 2\cos 2\theta - 2\cos 2\theta + 4\theta\sin 2\theta$

$= 4\theta\sin 2\theta$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $4\theta\sin 2\theta > 0$

なので x_q は単調に増加する

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $x_q = \pi$ なので

もとめる面積を S とすると

$$S = \int_0^{\pi} 2 - y_p \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} (2 - 1 + \cos 2\theta + 2\theta\sin 2\theta)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta + 2\theta\sin 2\theta) \times 4\theta\sin 2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\theta\sin 2\theta + 2\theta\sin 4\theta + 8\theta^2 \times \frac{1-\cos 4\theta}{2} \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\theta\sin 2\theta \cdot (2\theta)' + 4\theta\sin 4\theta \cdot (4\theta)' \times \frac{1}{8} + 4\theta^2 + (4\theta)^2\cos 4\theta \cdot (4\theta)' \times \frac{1}{16} \, d\theta$$

$$= \left[\sin 2\theta - 2\theta\cos 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta - \frac{\theta}{2}\cos 4\theta + \frac{4}{3}\theta^3 + \frac{1}{16}(16\theta^2 - 2)\sin 4\theta + \frac{\theta}{2}\cos 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(0 + \pi + 0 - \frac{\pi}{4} \times 1 + \frac{\pi^3}{6} + \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{8}\right) \times 0 + \frac{\pi}{4} \times (-1)\right) - (0 - 0 + 0 - 0 + 0 + 0 + 0)$$

$$= \underline{\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{2}}$$