① (1) $r' = -\sin\theta$, $r'' = -\cos\theta$

$$f(\theta) = \frac{(9+6\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{(3+\cos\theta)^2+2\sin^2\theta-(3+\cos\theta)(-\cos\theta)}$$

$$= \frac{(10+6\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{9+6\cos\theta+\cos^2\theta+2\sin^2\theta+3\cos\theta+\cos^2\theta} = \frac{(10+6\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{11+9\cos\theta}$$

$$f(0) = \frac{(10+6)^{\frac{3}{2}}}{11+9} = \frac{64}{20} = \underline{\frac{16}{5}} \qquad f(\pi) = \frac{(10-6)^{\frac{3}{2}}}{11-9} = \underline{4}$$

(2)
$$f'(\theta) = \frac{\frac{3}{2}(10+6\cos\theta)^{\frac{1}{2}}(-6\sin\theta)(11+9\cos\theta)-(10+6\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\times(-9\sin\theta)}{(11+9\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{-9(10+6\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\sin\theta(3\cos\theta+1)}{(11+9\cos\theta)^2}$$

$f(2\pi+\theta) = f(\theta)$ だから $f(\theta)$ は周期 2π の周期関数（よって以下 $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ で考える）

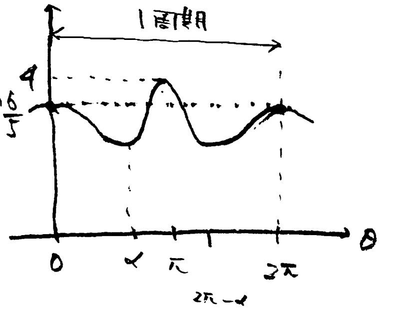
ここで $10+6\cos\theta > 0$, $\sin\theta = 0$ となるのは $\theta = 0, \pi, 2\pi$.

$3\cos\theta+1=0$ となる θ は $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ を満たす α を用いて

$\theta = \alpha, 2\pi-\alpha$.

以上より $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ における $f(\theta)$ の増減は

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π	$\cdots$	$2\pi-\alpha$	$\cdots$	2π
$f'(\theta)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(\theta)$		↘		↗		↘		↗	



したがって $f(\theta)$ のグラフは右のようになり、

$f(\theta)$ は $\theta = 0, \pi$ で極大値をとる

(3)
$$f(\alpha) = \frac{(10+6(-\frac{1}{3}))^{\frac{3}{2}}}{11+9(-\frac{1}{3})} = \frac{16\sqrt{2}}{11-3} = 2\sqrt{2}$$

$f(2\pi-\alpha) = f(\alpha) = 2\sqrt{2}$

よって最小値は $2\sqrt{2}$

② (1) $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}i = \dfrac{\dfrac{a_n-5}{1-5a_n}+1}{\dfrac{a_n-5}{1-5a_n}-1}i = -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a_n+1}{a_n-1}\right)i = -\dfrac{2}{3}b_n$

$\therefore b_{n+1} = -\dfrac{2}{3}b_n$

(2) $b_1 = \dfrac{a_1+1}{a_1-1}i$

$= \dfrac{\dfrac{3+i}{3-i}+1}{\dfrac{3+i}{3-i}-1}i = \dfrac{3+i+3-i}{3+i-3+i}i = \dfrac{6i}{2i} = 3$

よって $n=1$のとき b_1は実数である.

また(1)より. $n=k$のときb_kが実数であれば. $b_{k+1} = -\dfrac{2}{3}b_k$ だから.

b_{k+1}も実数.

よって数学的帰納法により. b_nは全てのnについて実数である.

(3) $b_n = \dfrac{a_n+1}{a_n-1}i$ より

$a_n(b_n - i) = b_n + i$

b_nは実数だから $b_n - i \neq 0$.である. したがって

$a_n = \dfrac{b_n+i}{b_n-i}$

$a_n+1 = \dfrac{2b_n}{b_n-i}$

ところで(1)より. $b_n = 3\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ となるので $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

よって $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n+1| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2b_n}{b_n-i}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}|2b_n|\left|\dfrac{1}{b_n-i}\right| = 0$

(4) $|a_1| = \dfrac{|3+i|}{|3-i|} = 1$. …①

$|a_k| = 1$と仮定すると.

$|a_{k+1}|^2 = \left(\dfrac{a_k-5}{1-5a_k}\right)\left(\dfrac{\overline{a_k}-5}{1-5\overline{a_k}}\right) = \dfrac{26-5a_k-5\overline{a_k}}{26-5a_k-5\overline{a_k}} = 1$ …②

①.②より 数学的帰納法により. 全てのnについて $|a_n|=1$が成り立つ.

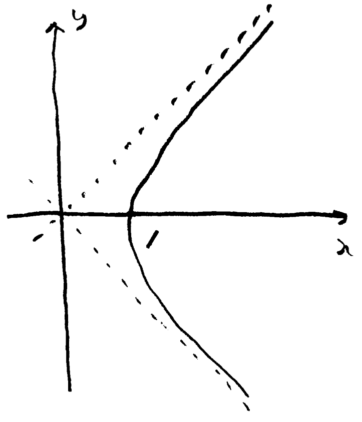
これは a_nが原点を中心とした半径1の円周上に存在することを示している.

③ (1) $-1<t<1$ のとき $0<\sqrt{1-t^2}\leqq 1$ だから $x\geqq 1$ （等号は $t=0$）

$t\to 1-0$ のとき $y\to+\infty$, $t\to -1+0$ のとき $y\to-\infty$

また $x^2-y^2=\dfrac{1}{1-t^2}-\dfrac{t^2}{1-t^2}=1$ だから

曲線は $x^2-y^2=1$ の $x\geqq 1$ の部分



(2) $e^{f(t)}=X$ とすると （このとき $X>0$ となる）

$$\frac{X-\frac{1}{X}}{2}=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$X^2-1=\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}X$$

$$X^2-\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}X-1=0$$

$$X=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\pm\sqrt{\frac{t^2}{1-t^2}+1}$$

$X>0$ を満たすのは $X=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}(t+1)=e^{f(t)}$

両辺の対数をとる．

$$f(x)=\log\left(\frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

$$=\log(t+1)-\frac{1}{2}\log(1+t)(1-t)=\underline{\frac{1}{2}\left(\log(t+1)-\log(1-t)\right)}$$

(3) $f(t_3)=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+t_3}{1-t_3}=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+t_1}{1-t_1}+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+t_2}{1-t_2}$

$$\log\frac{1+t_3}{1-t_3}=\log\left(\frac{1+t_1}{1-t_1}\times\frac{1+t_2}{1-t_2}\right)$$

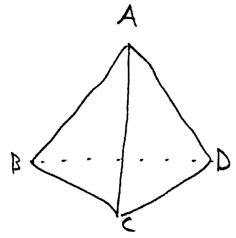
$$(1+t_3)(1-t_1)(1-t_2)=(1-t_3)(1+t_1)(1+t_2)$$

$$t_3\{(1-t_1)(1-t_2)+(1+t_1)(1+t_2)\}=(1+t_1)(1+t_2)-(1-t_1)(1-t_2)$$

$$\therefore\ t_3(2+2t_1t_2)=2(t_1+t_2)$$

$$\underline{t_3=\frac{t_1+t_2}{1+t_1t_2}}$$

④ (1) 4匹のアリを $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ で表す.



また 4つの頂点を A, B, C, D とする.

時刻 n において, $\boxed{1}$ が A に居合わせる

確率は, 直前に, どこの頂点にいたとしても $\frac{1}{4}$.

$\boxed{2}$〜$\boxed{4}$ も同じだから, 時刻 n において, 4匹のありが頂点 A に居合わせる

確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^4$

B, C, D に居合わせる確率も同じだから, もとめる確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^4 \times 4 = \underline{\frac{1}{64}}$

(2) ある時刻において, 4匹のアリがどの頂点にいるのかは全て同様に

確からしい確率でおこる. そのうち, 4匹のアリが全て異なる頂点にあるのは

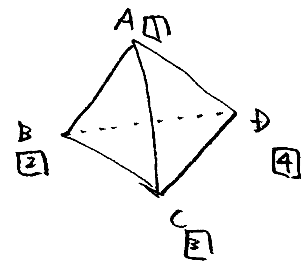
4! 通りだから, ある時刻において, 4匹のアリが全て異なる頂点にいる確率は

$$\frac{4!}{4^4} = \frac{\cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 1}{\cancel{4}\cdot \cancel{4}_2\cdot 4\cdot 4} = \frac{3}{32}$$

よって 0分から n 分まで, どのアリも頂点で出会わない確率は $\underline{\left(\frac{3}{32}\right)^n}$

(3) A, B, C, D の 4 頂点に $\boxed{1}$, $\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ が

いたとき, 1分後の配置は



(i) $\boxed{1}$ が A にとどまったとき

$(B, C, D) = (\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}), (\boxed{3}\boxed{4}, \boxed{2}), (\boxed{4}, \boxed{2}\boxed{3})$

の 3 通り.

(ii) $\boxed{1}$ が B に移るとき,

$\boxed{2}$ は C または D に移るので $(C, D, A) = (\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}), (\boxed{2}\boxed{4}\boxed{3}), (\boxed{4}\boxed{2}\boxed{3}), (\boxed{3}\boxed{2}\boxed{4})$

$\boxed{1}$ が, C, D に移るときも同様だから

どのアリも頂点および辺の中点で出会わない確率は $\dfrac{3 + 4 \times 3}{4^4} = \dfrac{15}{256}$

よって 0〜n 分のあいだでどのアリも出会わないのは

$\underline{\left(\frac{15}{256}\right)^n}$