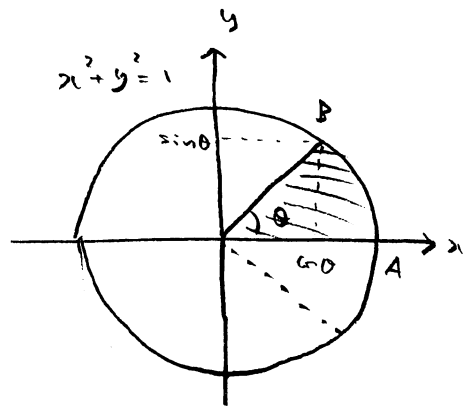
①



(1) $V_1(\theta) = \int_{\cos\theta}^{1} \pi y^2\,dx + \frac{1}{3}\pi \sin^2\theta \cos\theta$

$= \pi\int_{\cos\theta}^{1} 1-x^2\,dx + \frac{1}{3}\pi\sin^2\theta\cos\theta$

$= \pi\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\cos\theta}^{1} + \frac{1}{3}\pi\sin^2\theta\cos\theta$

$= \frac{2}{3}\pi - \pi\cos\theta + \frac{1}{3}\pi\cos\theta$

$= \underline{\frac{2}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi\cos\theta}$ //

(2) $V_2(\theta) = \int_{0}^{\sin\theta} \pi x^2\,dy - \frac{1}{3}\pi\cos^2\theta\sin\theta$

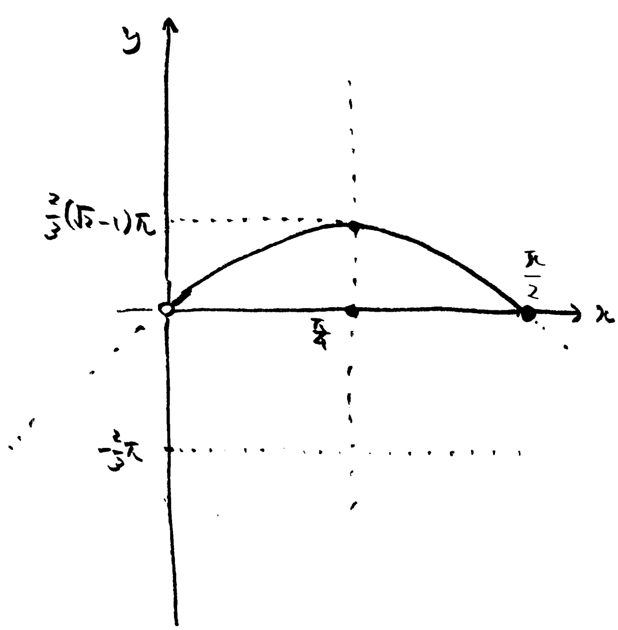
$= \pi\left[y - \frac{1}{3}y^3\right]_{0}^{\sin\theta} - \frac{1}{3}\pi\cos^2\theta\sin\theta$

$= \pi\sin\theta - \frac{1}{3}\pi\sin\theta = \underline{\frac{2}{3}\pi\sin\theta}$ //

(3) $V(\theta) = V_2(\theta) - V_1(\theta)$

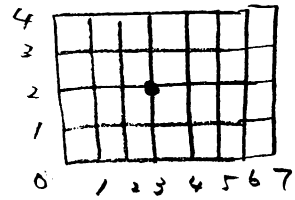
$= \frac{2}{3}\pi\sin\theta + \frac{2}{3}\pi\cos\theta - \frac{2}{3}\pi$

$= \frac{2}{3}\sqrt{2}\pi\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{3}\pi$



②

(1) 点Aと対角にある頂点が決まれば四角形が1つ定まる。



右のように上下・左右に番号を振って点を表すことにする。

(このとき Aは(0,0)、図中の黒丸は(3,2)と表される)

Aと対角にある頂点は (1,1),(1,2)…(1,7),(2,1)…(4,7)であり、

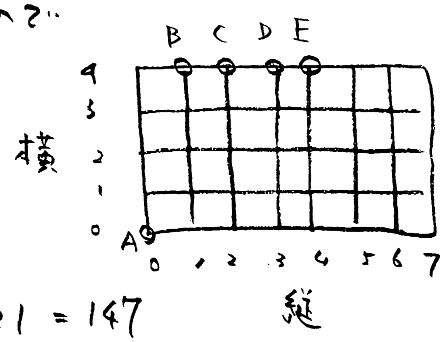
$$7\times4 = \underline{28通り}$$

(2) 図1で全ての長方形を考えると、左右の辺は0,1,2,3,4の5通りから2つを選び、上下の辺は0,1,…7までの8通りから2つを選べばよいので

$$_5C_2\times{}_8C_2 = 10\times28 = 280通り$$

そこからAの頂点を含むものを除けばよいので

$$280-28 = \underline{252通り}$$



(3) 図1で最上辺を使わずにできる四角形は

$$_4C_2\times{}_8C_2-7\times3 = 6\times28-21 = 147$$

横の4を必ず使い、縦は0〜4のうちの2つとなっているものは

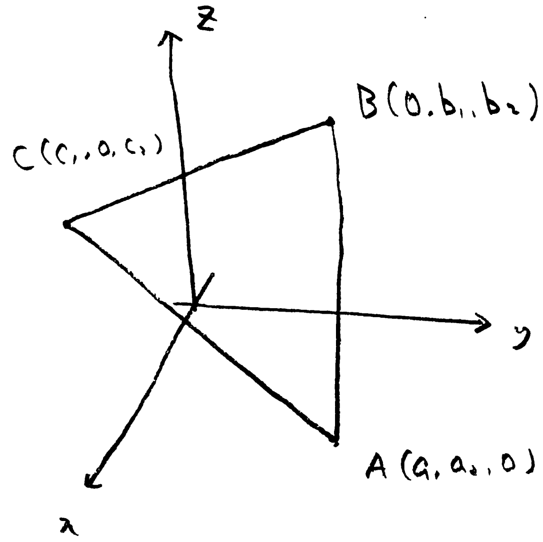
$$_4C_1\times{}_5C_2 = 40$$

そのうち、Aを含むものは AとB,C,D,Eの組みあわせの4つ。

以上より

$$147+(40-4) = 183通り$$

③



(1) $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a_2 b_1$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - b_1^2 a_2^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}$$

(2) $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ とする

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ より　$a_1 x + a_2 y = 0$　　$x = -\frac{a_2}{a_1} y$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ より　$b_1 y + b_2 z = 0$.　　$z = -\frac{b_1}{b_2} y$

$$x : y : z = -\frac{a_2}{a_1} y : y : -\frac{b_1}{b_2} y$$

$$= -a_2 b_2 : a_1 b_2 : -a_1 b_1$$

$$(x, y, z) = (-a_2 b_2 k,\ a_1 b_2 k,\ -a_1 b_1 k)$$

とおくと $|\overrightarrow{OP}| = 1$ より

$$a_2^2 b_2^2 k^2 + a_1^2 b_2^2 k^2 + a_1^2 b_1^2 k^2 = 1$$

$$k = \frac{\pm 1}{\sqrt{a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_1^2}}$$

$$P\left(\frac{\mp a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}},\ \frac{\pm a_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}},\ \frac{\mp a_1 b_1}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}}\right)$$

(3) Cから平面OABに下ろした垂線の足をHとすると

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + d\,\overrightarrow{OP} \quad \cdots ①$$

と表すことができる

Hは平面OAB上にあるので

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OP} = 0 \quad \cdots ②$$

②より

$$(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OP} = 0$$

ここに①を代入

$$(\overrightarrow{OC} + d\,\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OP} = 0$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} + d - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}} (\mp c_1 a_2 b_2 \mp c_2 a_1 b_1) + d = 0$$

$$d = \frac{\pm a_2 b_2 c_1 \pm a_1 b_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}}$$

$$V = \frac{1}{3} S|d| = \frac{1}{6} |a_2 b_2 c_1 + a_1 b_1 c_2|$$

$$= \underline{\frac{1}{6} (a_2 b_2 c_1 + a_1 b_1 c_2)}$$

④

(1) $\int f_k(x)dx = -x^3 - x^2 + a_k x + C$ （Cは積分定数）

関係式より

$$-(k+1)^3 - (k+1)^2 + a_{k+1}(k+1) = -k^3 - k^2 + a_k k - k^2 - k.$$

$$-3k^2 - 3k - 1 - 2k - 1 + (k+1)a_{k+1} = k a_k - k^2 - k.$$

$$(k+1)a_{k+1} = k a_k + 2k^2 + 4k + 2$$

$$\underline{a_{k+1} = \frac{k}{k+1} a_k + 2(k+1)}$$

(2) $k a_k = b_k$ とおくと.

$$b_{k+1} = b_k + 2(k+1)^2$$

$k \geqq 2$ のとき

$$b_k = b_1 + \sum_{l=1}^{k-1} 2(l+1)^2$$

$$= 1 \cdot a_1 + 2\sum_{l=1}^{k} l^2 - 2$$

$$= \frac{1}{3}k(k+1)(2k+1) \quad (k \geqq 2)$$

上式で $k=1$ とすると $b_1 = \frac{1}{3} 1 \times 2 \times 3 = 2$ となるので.

上式は $k=1$ でも成り立っている.

$$\therefore \quad b_k = k a_k = \frac{1}{3}k(k+1)(2k+1) \quad (k \geqq 1)$$

$$\underline{a_k = \frac{1}{3}(k+1)(2k+1)}$$

(3) $$\sum_{k=1}^{n} \int_0^k f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\left(-k^3 - k^2 + k \times \frac{1}{3}(k+1)(2k+1)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}k - \frac{1}{3}k^3 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1) \left(1 - \frac{1}{2} n(n+1) \right)$$

$$= -\frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(n-1)$$