① (1) n本のくじを全て区別する。

$1 \sim i$番目までのクジの引かれ方は $_nP_i$

そのうち、i番目の人があたりクジを引くのは、

i番目の人のクジは、 k通り

$1 \sim i-1$ 〃 $_{n-1}P_{i-1}$通り

以上より、もとめる確率Pは

$$P = \frac{k \times {}_{n-1}P_{i-1}}{{}_nP_i} = \frac{k \times (n-1)!}{n!\,(n-1-i+1)!} \cdot \frac{(n-i)!}{} = \frac{k}{n}$$

証明終

(2) $y = \sin x + 2\sin(a-x)$

$= \sin x + 2\sin a \cos x - 2\cos a \sin x$

$= (1-2\cos a)\sin x + 2\sin a \cos x$

$= \sqrt{(1-2\cos a)^2 + (2\sin a)^2}\ \sin(x+\alpha)$ …①

(ここでαは $\tan\alpha = \dfrac{2\sin a}{1-2\cos a}$ を満たす実数)

$x+\alpha$は任意の実数値をとりうるので、①の最大値が$\sqrt{7}$となるのは

$$\sqrt{(1-2\cos a)^2 + (2\sin a)^2} = \sqrt{7}$$

すなわち、

$$(1-2\cos a)^2 + (2\sin a)^2 = 7$$

が成り立つときで、これを整理すると

$$4 - 4\cos a + 1 = 7$$

$$\cos a = -\frac{1}{2}$$

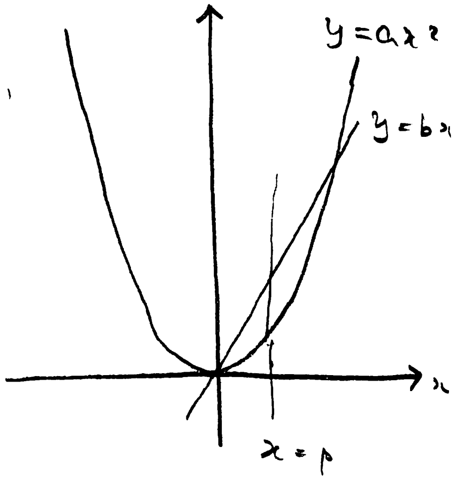
$$a = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$$ (nは任意の整数)

① (3) $y=ax^2$ と $y=bx$ の交点は

$ax^2=bx$ より $x=0,\ \frac{b}{a}$

2つの線で囲まれる図形の面積をSとして、

$$S=\int_0^{\frac{b}{a}} bx-ax^2\,dx=\frac{a}{6}\left(\frac{b}{a}\right)^3$$



そのうち $0\leqq x\leqq p$ の領域にあるものの面積を S_L とすると、

$$S_L=\int_0^{p} bx-ax^2\,dx=\left[\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{3}ax^3\right]_0^p$$

$$=\frac{1}{2}bp^2-\frac{1}{3}ap^3$$

$\frac{1}{2}S=S_L$ となるのは

$$\frac{a}{12}\left(\frac{b}{a}\right)^3=\frac{1}{2}bp^2-\frac{1}{3}ap^3$$

$$4ap^3-6bp^2+a\left(\frac{b}{a}\right)^3=0$$

$$\left(p-\frac{b}{2a}\right)\left(4ap^2-4bp-\frac{2b^2}{a}\right)=0 \quad \cdots ①$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 4a & -4b & -\frac{2b^2}{a} & \\
1\ -\frac{b}{2a} & 4a & -6b & 0 & \frac{b^2}{a^2} \\
 & 4a & -2b & & \\
\hline
 & & -4b & 0 & \\
 & & -4b & +\frac{2b^2}{a} & a \\
\hline
 & & & -\frac{2b^2}{a} & \frac{b^2}{a^2}
\end{array}$$

ここで $f(p)=4ap^2-4bp-\frac{2b^2}{a}$ とすると

$$f(p)=4a\left(p-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{2b^2}{a}-\frac{b^2}{a}$$

$f(0)=-\frac{2b^2}{a}<0$, $f\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{4b^2}{a}-\frac{4b^2}{a}-\frac{2b^2}{a}=-\frac{2b^2}{a}<0$

より、$f(p)=0$ となる p は $0\leqq p\leqq\frac{b}{a}$ の区間には存在しない。

よって①をみたす p は $p=\frac{b}{2a}$ のみである。

$$\therefore\ p=\frac{b}{2a}$$

② (1) $\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)$

$= \sum_{k=1}^{n} (n+1) = n(n+1)$

よって $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$ 証明終

(2) $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

よって $\sum_{k=1}^{n} \{(k+1)^3 - k^3\} = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k + 1)$

$\Leftrightarrow \quad (n+1)^3 - 1^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{4+3n+1}{2} \times n$

$\Leftrightarrow \quad 3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - \frac{1}{2}(3n+5)n$

$\Leftrightarrow \quad 3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right)$

$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ 証明終

(3) $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ より

$\sum_{k=1}^{n} \{(k+1)^4 - k^4\} = \sum_{k=1}^{n} (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$

$\Leftrightarrow \quad (n+1)^4 - 1^4 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$

$\Leftrightarrow \quad 4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 2n^3 - 3n^2 - n - 2n^2 - 2n - n$

$\Leftrightarrow \quad 4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 2n^3 + n^2$

$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ 証明終

(4) $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$

この式の両辺を $k=1$ 〜 n まで足しあわせる

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ (k+1)^5 - k^5 \right\} = \sum_{k=1}^{n} \left(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+1)^5 - 1^5 = 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + \frac{5}{2} n^2 (n+1)^2 + \frac{5}{3} n(n+1)(2n+1) + \frac{5}{2} n(n+1) + n$$

$$\Leftrightarrow \quad 5\sum_{k=1}^{n} k^4 = (n+1)^5 - \frac{5}{2} n^2 (n+1)^2 - \frac{5}{3} n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2} n(n+1) - (n+1)$$

$$= (n+1)\left\{ (n+1)^4 - \frac{5}{2} n^2 (n+1) - \frac{5}{3} n(2n+1) - \frac{5}{2} n - 1 \right\}$$

$$= n(n+1)\left\{ n^3 + 4n^2 + 6n + 4 - \frac{5}{2} n(n+1) - \frac{5}{3}(2n+1) - \frac{5}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

③ (1) $e^x > \dfrac{x^m}{m!}$ が成り立つことを数学的帰納法により示す。

(i) $m=1$ のとき

$e^x > x^1$ を示す。

$f_1(x) = e^x - x$ とすると、$f_1'(x) = e^x - 1$

ここで、$x>0$ のとき $e^x>1$ なので、$f_1'(x)>0$ であり、

$f_1(x)$ は単調増加関数。

また $f_1(0) = e^0 - 0 = 1 - 0 = 1$ より

$x>0$ において、$f_1(x) > 1 > 0$ であることが分かる

以上より $e^x > x^1$ が示された

(ii) $m=k$ のとき

$e^x > \dfrac{x^k}{k!}$ が成り立つと仮定する。

このとき、$e^x > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ が成り立つことを示す。

$f_{k+1}(x) = e^x - \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ とおくと、

$f_{k+1}'(x) = e^x - \dfrac{1}{(k+1)!} \times (k+1)x^k = e^x - \dfrac{x^k}{k!} > 0$ (∵仮定)

したがって $f_{k+1}(x)$ は $x>0$ において単調に増加する。

また $f_{k+1}(0) = e^0 - 0 = 1$ なので

仮定の下で $f_{k+1}(x) > 0$ が成り立つことが分かる。

したがって、$e^x > \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ が成り立つ。

(i)(ii)より、数学的帰納法により、$e^x > \dfrac{x^m}{m!}$ が成り立つことが示された。

(2) (1)より $e^x > \dfrac{x^m}{m!}$

$m=n+1$ として、$e^x > \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \iff \dfrac{(n+1)!}{x} > \dfrac{x^n}{e^x}$

また e^x, x^n はいずれも正なので、

$$0 < \frac{x^n}{e^x} < \frac{(n+1)!}{x}$$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)!}{x} = 0$ なので、はさみうちの原理より

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ が成り立つ

証明終

(3) $\Gamma_k(n) = \int_0^k x^{n-1} e^{-x} dx$

$= \left[-e^{-x} \cdot x^{n-1}\right]_0^k + \int_0^k (n-1) x^{n-2} e^{-x} dx$

$= -e^{-k} k^{n-1} + (n-1)\Gamma_k(n-1)$

$\lim_{k\to\infty} e^{-k} k^{n-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^n}{e^k} \times \frac{1}{k} = 0 \quad (\because (2))$

が成り立つので

$\lim_{k\to\infty} \Gamma_k(n) = \lim_{k\to\infty} \left\{-e^{-k} k^{n-1} + (n-1)\Gamma_k(n-1)\right\}$

$= (n-1) \lim_{k\to\infty} \Gamma_k(n-1)$

ここで $\lim_{k\to\infty} \Gamma_k(n) = I(n)$ とおくと 上式は $I_n = (n-1) I_{(n-1)}$

と表され、これを用いて

$I(n) = (n-1) I(n-1)$

$= (n-1)(n-2) I(n-2)$

$= \cdots = (n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1\, I_{(1)}$

また $I(1) = \lim_{k\to\infty} \Gamma_k(1) = \lim_{k\to\infty} \int_0^k e^{-x} dx = \lim_{k\to\infty} (-e^{-k} + 1) = 1$

だから

$I(n) = (n-1)!$

$\therefore \quad \underline{\lim_{k\to\infty} \Gamma_k(n) = (n-1)!}$