①

(1) $\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$\beta = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi.$

$\frac{20}{}$ $-\frac{2}{3}\cancel{\times 10}$

$(\alpha\beta)^{-10} = 2^{-10}\left(\cos\frac{4}{6}\pi + i\sin\frac{4}{6}\pi\right)^{-10} = 2^{-10}\left(\cos\left(-\frac{20}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{20}{3}\pi\right)\right)$

$= 2^{-10}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$ $\quad \therefore \underline{\frac{4}{3}\pi}$ //(ア)

$\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \omega$ とおくと

$(\alpha - \gamma)\omega + \gamma = \alpha\beta$

$\alpha\omega - \gamma\omega + \gamma = \alpha\beta$

$\gamma(1-\omega) = \alpha\beta - \alpha\omega$

$\gamma = \frac{\alpha(\beta-\omega)}{1-\omega} = \frac{(\sqrt{3}-i)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$= -2 + 2i$

$\therefore k = -2$

(2)

	1	2	3	4	5	平均
x	4	5	3	6	2	4
y	8	4	6	3	9	6
$x-\bar{x}$	0	1	−1	2	−2	0
$y-\bar{y}$	2	−2	0	−3	3	0
$(x-\bar{x})\times(y-\bar{y})$	0	−2	0	−6	−6	−2.8

$\underline{S_{x,y} = -2.8}$ //

(3) xyzで割って $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \cdots ①$

$\frac{3}{z} \leqq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \leqq \frac{3}{x} \iff x \leqq 3,\ z \geqq 3.$

$x = 1$ のとき ①は成立しない.

$x = 2$ のとき $\frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqq \frac{2}{y}$ より $y \leqq 4.$

$y=3$ のとき　$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$　$z=6$
$(x,y,z)=(2,3,6)$

$y=4$ のとき　$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$　$z=4$　$y=z$ となったので不適.

$x=3$ のとき…　$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}\leqq\frac{2}{y}\Leftrightarrow y\leqq 3$ となるので不適

以上より $(x,y,z)=(2,3,6)$　$x+y+z=\underline{11}$

(4)　$\sin 18^\circ+\cos 36^\circ$

$18^\circ=\theta$ とすると　$5\theta=90^\circ \Leftrightarrow 3\theta=90^\circ-2\theta$ より

$\sin 3\theta=\sin(90^\circ-2\theta)$

$\Leftrightarrow 3\sin\theta-4\sin^3\theta=1-2\sin^2\theta$

$\Leftrightarrow 4\sin^3\theta-2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$

$\Leftrightarrow (\sin\theta-1)(4\sin^2\theta+2\sin\theta-1)=0$

$\sin\theta=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{4}$

$0^\circ<\theta=18^\circ<90^\circ$ なので.　$\sin\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$\sin\theta+\cos 2\theta=\sin\theta+1-2\sin^2\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+1-\frac{6-2\sqrt{5}}{8}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(5)　$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

$a_n+1=2^{n-1}(1+1)=2^n$

$a_n>100000\Leftrightarrow a_n+1>100001\Leftrightarrow 2^n>100001>100000$

$\Leftrightarrow n\log_{10}2>5\Leftrightarrow n>\frac{5}{0.3}=16.6\cdots$

$n=17$　このとき　$a_{17}=2^{17}-1=1024\times 128-1>100000$

$\therefore\ \underline{n=17}$

(6) 不良品になる確率 $\dfrac{200\times1\%+300\times2\%+300\times1\%+200\times2\%}{200+300+300+200}=\dfrac{15}{1000}=\dfrac{3}{200}$

Wから不良品 $\dfrac{200}{1000}\times\dfrac{2}{100}=\dfrac{1}{250}$

$$\frac{\frac{1}{250}}{\frac{3}{200}}=\frac{1}{250}\times\frac{200}{3}=\underline{\frac{4}{15}}$$

(7) 1人目が女の子 $\dfrac{1}{2}$

女の子1人の家庭で女の子が顔を出す $\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{8}$

$$\frac{1}{8}\div\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{4}}$$

②

(1) $\displaystyle\int_{2\pi}^{0} \left| 2\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{5}{6}\pi\right)\right| dx$

$\displaystyle = -2\sqrt{3}\int_{0}^{2\pi} \left|\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)\right| dx = -2\sqrt{3}\int_{0}^{2\pi} |\sin x|\, dx$

$\displaystyle = -2\sqrt{3} \times 2\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = -4\sqrt{3}\left[-\cos x\right]_{0}^{\pi} = \underline{-8\sqrt{3}}$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{0} \frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}\, dx = \int_{1}^{0} 1 - \frac{2}{x^2+x+1}\, dx$

$\displaystyle = \int_{0}^{1} \frac{2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\, dx - \int_{0}^{1} dx$

$x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおく　$\displaystyle\frac{dx}{d\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\cos^2\theta}$,

x	$0 \to 1$
θ	$\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$

$\displaystyle = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cancel{2} \times \frac{4}{3} \times \cancel{\cos^2\theta} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{\cos^2\theta}}\, d\theta - 1$

$\displaystyle = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi - 1$

(3)

$\displaystyle x = \sqrt[3]{\frac{y}{8}} = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{2}$　　$g(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$

$\displaystyle\int_{2}^{3} (x-1) \times \frac{1}{2}(x-2)^{\frac{1}{3}}\, dx$

$x - 2 = t$ とおく

$\displaystyle = \int_{0}^{1} (t+1) \times \frac{1}{2} t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} t^{\frac{4}{3}} + t^{\frac{1}{3}}\, dt$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{7}t^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{7} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{12+21}{28} = \underline{\frac{33}{56}}$

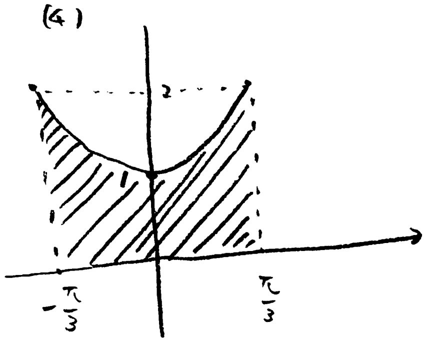
$x = \frac{1}{3}\log y$　　$h(x) = \frac{1}{3}\log x$

$\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x\, \frac{1}{3}\log(x^2-1)\, dx = \frac{1}{6}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (x^2-1)'\log(x^2-1)\, dx$

$$= \frac{1}{6}\left[(x^2-1)\log(x^2-1) - x^2+1\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{6}(2\log 2 - 2) - \frac{1}{6}(-2+1) = \frac{1}{3}\log 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\log 2 - \frac{1}{6}$$

(4)



$\int \frac{1}{\cos x} dx$　　　$\sin x = t$ とおく。

$$= \int \frac{1}{\cos x} \times \left(-\frac{1}{\cos x}\right) dt$$

$$= \int \frac{-1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} dt$$

$$= \frac{1}{2}\log|t+1| - \frac{1}{2}\log|t-1|$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \left[\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \underline{2\log(2+\sqrt{3})}$$

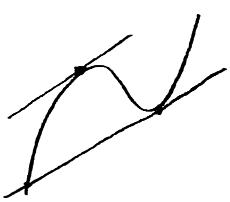
(5) $4(x-3)^2 + 9y^2 = 36$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad \begin{cases} x = 3\cos\theta + 3 \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$$

$$x^2+y^2-6x = (x-3)^2 + y^2 - 9 = 9\cos^2\theta + 4\sin^2\theta - 9$$

$$= 5\cos^2\theta - 5 \geq \underline{-5}$$

(6)



$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$

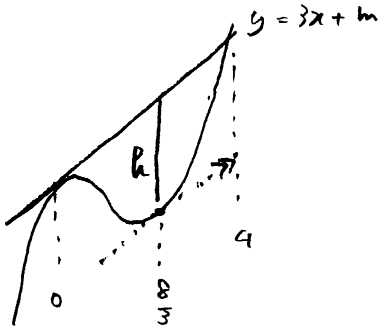
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$

$f'(x) = 3$ となるのは　$x = 0, \frac{8}{3}$

$f(x) = (3x^2 - 8x)\left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right) - \frac{5}{9}x + 1$

$f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{40}{27} + 1 = -\frac{13}{27} < 0 < 3 \times \frac{8}{3} + m$

したがって $y=f(x)$ と $y=3x+m$ は $x=0$ で接する



$$f(0)=1=3\times 0+m \quad \therefore m=1.$$

$$f(x)-3m-1=x^2(x-4).$$

$$h=\left(3\times\frac{8}{3}+1\right)-f\left(\frac{8}{3}\right)$$

$$=9-\left(-\frac{13}{27}\right)=\frac{256}{27}$$

△APB の最大値は $\frac{1}{2}h\times(4-0)=\frac{512}{27}$.

そのとき P は $\left(\frac{8}{3},-\frac{13}{27}\right)$

③ m, m' を $0, 1, 2, 3, 4$ のいずれかの整数とする。

このとき

$$a\times 10^{m} - a\times 10^{m'}$$

が 9 の倍数であることを示す。　…（*）

$m > m'$ のとき

$$a\,10^{m'}(10^{m-m'}-1) = a\times 10^{m'}(10-1)(10^{m-m'-1}+\cdots+1)$$

となるので、$a\times 10^{m} - a\times 10^{m'}$ は 9 の倍数。

$m < m'$ も同様

また $m = m'$ のときは

$$a\times 10^{m} - a\times 10^{m'} = 0$$

となるので、このときも 9 の倍数である。

$$n = a\times 10^4 + b\times 10^3 + c\times 10^2 + d\times 10^1 + e$$

（a は $1\sim 9$、b, c, d, e は $0\sim 9$ の1桁の整数）

とおくと、n' は

$$n' = a\times 10^{b_1} + b\times 10^{b_2} + c\times 10^{b_3} + d\times 10^{b_4} + e\times 10^{b_5}$$

（$b_1 \sim b_5$ は $0, 1, 2, 3, 4$ のいずれかで全て異なる整数）

と表すことができ、このとき

$$n - n' = a(10^4 - 10^{b_1}) + b(10^3 - 10^{b_2}) + c(10^2 - 10^{b_3}) + d(10^1 - 10^{b_4}) + e(10^0 - 10^{b_5})$$

と表せ、これは（*）より、全て、9 の倍数となる数の和なので、

9 の倍数である。

証明終