①

(1) Cが引くくじはあたりの1本とn-1本のはずれのn通りあり、
それらは全て同様に確からしい確率で引かれるので、あたる確率は $\frac{1}{n}$

(2) (1)と同様に考えて、$\frac{2}{n}$

(3) Aがあたりを引く確率は $\frac{k}{n}$

このときBもあたりを引くのは $\frac{k-1}{n-1}$

$$\therefore \frac{k}{n} \times \frac{k-1}{n-1} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

(4) Aがはずれを引く確率は $\frac{n-k}{n}$

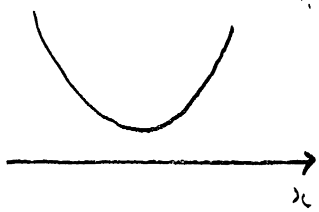
このときBがあたりを引く確率は $\frac{k}{n-1}$

$$\therefore \frac{n-k}{n} \times \frac{k}{n-1} = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$$

(5) (1)、(2)と同様に考えて、$\frac{k}{n}$

②

(1) $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ とする



すべての x について $f(x)>0$ となるとき、

$y=f(x)$ のグラフは右のように、常に x 軸の上側に存在する。

そのための条件は判別式を D として、$D<0$ となることである

$D=\alpha^2-4\beta<0$　　$\therefore\ \underline{\beta>\frac{1}{4}\alpha^2}$

(2) $a>0$ のとき　$ay+b<0 \iff y<-\frac{b}{a}$ となり、

y が $-\frac{b}{a}$ よりも大きくなったとき、不等式は成立しない。

$a<0$ のとき、$ay+b<0 \iff y>-\frac{b}{a}$ となり

y が $-\frac{b}{a}$ よりも小さいとき、不等式は成立しない。

$a=0$ のとき、$ay+b<0 \iff b<0$ となるが、

これは $b<0$ のとき、y の値にかかわらず不等式が成り立つことを示している

以上より　$\underline{a=0 \text{ かつ } b<0}$

(3) $x^2+4xy+4y^2+5x+cy+d>0$

$\iff x^2+(4y+5)x+4y^2+cy+d>0$

ここで y を固定すると、上の不等式がすべての実数 x について成り立つ条件は (1) より、

$$4y^2+cy+d>\frac{1}{4}(4y+5)^2$$

$$\iff (10-c)y+\left(-d+\frac{25}{4}\right)>0$$

ここで y の固定をやめ、y を全ての実数で動かす。上の不等式が、すべての実数 y について成り立つのは (2) より、

$$10-c=0 \text{ かつ } -d+\frac{25}{4}<0$$

$\therefore\ \underline{c=10,\ d>\frac{25}{4}}$

③

(1) $\cos 3\theta = -\cos\theta \iff \cos 3\theta = \cos(\pi - \theta)$

$\iff 3\theta = \pm(\pi - \theta) + 2n\pi$ （nは整数）

$\iff \theta = \frac{1}{2}n\pi + \frac{1}{4}\pi,\ n\pi - \frac{1}{2}\pi$

このうち $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲に含まれるのは $\underline{\pm\frac{1}{4}\pi}$ //

(2) $\cos 3\theta - k\cos\theta = 0$

$\iff 4\cos^3\theta - 3\cos\theta - k\cos\theta = 0$

$\iff \cos\theta(4\cos^2\theta - 3 - k) = 0$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta \neq 0$ なので、上の方程式が解をもつための条件は、$4\cos^2\theta = 3 + k$ が解をもつこと。

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $0 < \cos\theta \leqq 1$ なので、そのための条件は

2乗した $0 < \cos^2\theta \leqq 1$ に $\cos^2\theta = \frac{3+k}{4}$ を代入して

$$0 < \frac{3+k}{4} \leqq 1$$

$$\iff -3 < k \leqq 1$$

kは正の整数なので $k = 1$

このとき $\cos^2\theta = \frac{3+1}{4} = 1$ なので、$\cos\theta = 1$ （$\because \cos\theta > 0$）

よって $\theta = 0$.

$\therefore \underline{k = 1,\ \theta = 0}$.

(3) $m\cos\theta - 3\cos 3\theta + n(1 + \cos 2\theta) = 0$

$\iff m - 12\cos^2\theta + 9 + 2n\cos\theta = 0$ （$\because$ (2)より $0 < \cos\theta \leqq 1$）

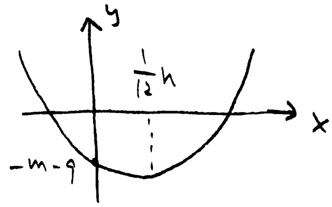
$\iff 12\cos^2\theta - 2n\cos\theta - m - 9 = 0$ …①

ここで $\cos\theta = x$ とおくと xは $0 < x \leqq 1$ で、上の方程式は

$$12x^2 - 2nx - m - 9 = 0$$

左辺を $f(x)$ と表すと、①が解をもつ条件は $y = f(x)$ が $0 < x \leqq 1$ において、x軸と交点をもつことに等しい …(*)

$$f(x) = 12\left(x - \frac{1}{12}n\right)^2 - \frac{1}{12}n - m - 9$$



となり、また $f(0) = -m-9 < 0$ より

$f(x)$のグラフの概形は右のようになるので、

$(*)$の条件が成り立つのは、$f(1) \geqq 0$となることである。

$$f(1) = 12 - 2n - m - 9 \geqq 0$$

$$2n + m \leqq 3.$$

n, mは正の整数なので、上の不等式は、$n = m = 1$のときのみ成り立つ。

$$\therefore \quad \underline{(n, m) = (1, 1)}$$

このとき ①は $12\cos^2\theta - 2\cos\theta - 10 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (6\cos\theta + 5)(\cos\theta - 1) = 0.$$

(2)より、$0 < \cos\theta \leqq 1$なので、上の式を満たすのは $\cos\theta = 1$ のみで、

$$\underline{\theta = 0}_{/\!/}$$

④

(1)

(i) $n=1$ のとき

$$左辺 = 1, \quad 右辺 = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1.$$

∴ $n=1$ において、命題は成立している。

(ii) $n=k$ のとき、

$$1+x+x^2+\cdots+x^{k-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x}$$

が成立していると仮定する。このとき

$$1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}+x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{k+1}}{1-x} \quad \cdots ①$$

が成り立つことを示す。

$$①式左辺 = (1+x+\cdots+x^{k-1}) + x^k$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x} + x^k \qquad (\because n=k \text{ の仮定})$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^k-(1-x)x^k}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^{k+1}}{1-x}$$

$$= ①式右辺.$$

∴ ①は成り立つ。

(i)(ii) より、数学的帰納法により、題意は示された。　　証明終

(2)

$$左辺 = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$$

$$= \left[-\log|1-x|\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$$

$$= \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx = 右辺.$$

証明終

(3) (2) の左辺は

$$左辺 = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})\,dx$$

$$= \left[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot 2^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\cdot 2^k}$$

$$= S_n$$

証明終

となるので (2) の左辺 $= S_n$ であることが分かる。

(4) $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ において

$\frac{x^n}{1-x} \geqq 0$ なので $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx \geqq 0$.

$0 < x \leqq \frac{1}{2}$ において、

$x^n \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ なので

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx \leqq \frac{1}{2^n}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,dx = \frac{1}{2^n}\Big[-\log|1-x|\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\log 2.$$

以上より $0 \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx \leqq \frac{1}{2^n}\log 2$

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\log 2 = 0$ となるので、はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx = 0.$$

よって $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,dx\right) = \underline{\log 2.}$ //

⑤

(1) C上の点をP(X, Y)とする

Pとlとの距離がAPと等しいので

$$\frac{|X+Y+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{(X-1)^2+(Y-1)^2}$$

両辺とも負ではないので2乗して

$$\frac{(X+Y+2)^2}{2} = (X-1)^2+(Y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad X^2+Y^2-8X-8Y-2XY=0.$$

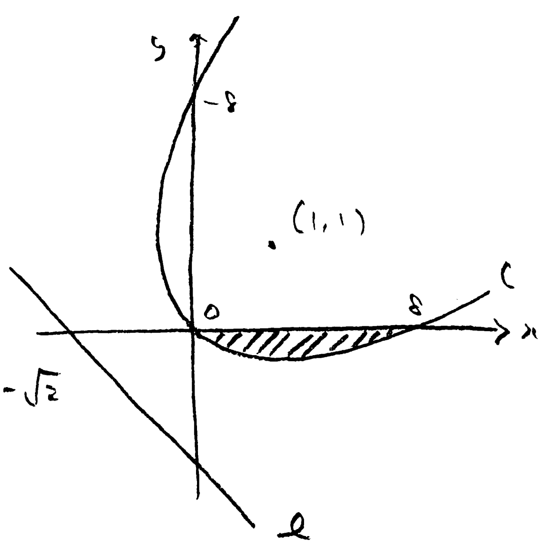
よってCの方程式は $\underline{x^2+y^2-8x-8y-2xy=0}$ //

(2) (1)で $y=0$ とすると

$x^2-8x=0$ 　　∴ $x=0, 8.$

∴ $\underline{(x, y)=(0, 0), (8, 0)}$ //

(3) Aおよびlからの距離が等しい点の軌跡は、放物線であり、Aは焦点、lは準線となっている。頂点が原点となっており、$AO=\sqrt{2}$ であることから、Cを45°回転させた図形は、焦点 $(0, \sqrt{2})$、準線 $y=-\sqrt{2}$ の放物線と一致するので、



$$4\cdot\sqrt{2}\,y = x^2 \quad \cdots ①$$

と一致する

したがってもとめる図形の面積は ①と、$y=x$ とで囲まれる図形の面積に等しい。（x軸を45°回転させたものが、$y=x$）

$y=\frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ と $y=x$ の交点は

$(0,0)$. $(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

よってもとめる面積を S とすると

$$S=\int_0^{4\sqrt{2}} x-\frac{\sqrt{2}}{8}x^2\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{\sqrt{2}}{8}\times(4\sqrt{2})^3=\underline{\frac{16}{3}}.$$