①

(1) 数学的帰納法で示す

(i) $n=1$のとき

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$T_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}$$

よって成り立つ。

(ii) $n=l$のとき

$S_{2l} = T_l$ が成り立つと仮定する。

このとき

$$S_{2(l+1)} = S_{2l} + \frac{(-1)^{2l}}{2l+1} + \frac{(-1)^{2l+1}}{2l+2}$$

$$= T_l + \frac{1}{2l+1} - \frac{1}{2l+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{l+k} + \frac{1}{2l+1} - \frac{1}{2l+2}$$

$$= \frac{1}{l+1} + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{l+1+k} + \frac{1}{2l+1} - \frac{1}{2l+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{l+1+k} + \frac{1}{l+1} - \frac{1}{2l+2} - \frac{1}{2l+2}$$

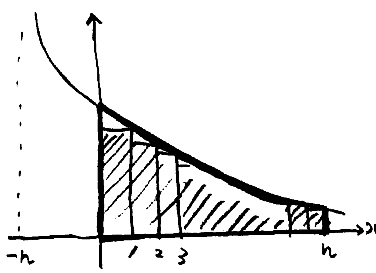
$$= T_{l+1}$$

よって $n=l+1$ においても成り立つ。

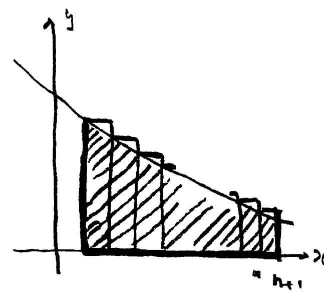
(i)(ii)より、全てのnについて $S_{2n} = T_n$ が成立する

(2)

$y = \dfrac{1}{n+x}$ のグラフを考える



(図1)



(図2)

(図1)より 太枠部 > 網かけ部

より

$$\int_0^n \frac{1}{n+x}dx > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = T_n \quad \cdots ①$$

(図2)より 太枠部 > 網かけ部 より

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = T_n > \int_1^{n+1} \frac{1}{n+x}dx \quad \cdots ②$$

①について $\int_0^n \frac{1}{n+x}dx = [\log(n+x)]_0^n = \log 2n - \log n = \log 2$

となるので

$$T_n < \log 2 \quad \cdots ③$$

②について $\int_1^{n+1} \frac{1}{n+x}dx = [\log(n+x)]_1^{n+1} = \log \frac{2n+1}{n+1} < T_n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log \frac{2n+1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\log \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) = \log 2$$

$\cdots ④$

よって ③.④より はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \log 2$$

となり、(1)より $\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \underline{\log 2}$

(3) $S_{2n-1} = S_{2n} + \frac{1}{2n}$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} + \frac{1}{2n}\right) = \log 2 + 0 = \underline{\log 2}$$

(2)について、別解

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\log(1+x)]_0^1 = \underline{\log 2}$$

②

(1) $f(x)=e^{-ax}-(1-ax)$ とおく.

$f'(x)=-ae^{-ax}+a=a(1-e^{-ax})$

$x\geqq 0$ のとき $e^{-ax}\leqq 1$ だから. $f'(x)$ は $x\geqq 0$ で正または0であり $f(x)$ は単調に増加する.

$f(0)=1-1+0=0$ なので, $x\geqq 0$ において

$$f(x)\geqq f(0)=0$$

よって $x\geqq 0$ において $1-ax\leqq e^{-ax}$ が成り立つ.

(2) (1)より $1-a_k x\leqq e^{-a_k x}$ を用いると

$$I_n(x)\leqq b_n e^{-a_1x}\times e^{-a_2x}\times e^{-a_3x}\times\cdots\times e^{-a_nx}$$
$$=b_n e^{-(a_1+a_2+\cdots+a_n)x}$$
$$=b_n e^{-b_nx}$$

$[0,1]$ において、上の不等式を積分すると

$$\int_0^1 I_n(x)dx\leqq\int_0^1 b_ne^{-b_nx}dx=\left[-e^{-b_nx}\right]_0^1=1-e^{-b_n}\leqq 1$$

よって $\int_0^1 I_n(x)dx\leqq 1$ が示された.

(3) $0\leqq a_k\leqq 1$ だから $x\geqq 0$ のとき $1-a_kx\geqq 1-x$ が成り立つ

これより

$$I_n(x)=b_n(1-a_1x)(1-a_2x)\cdots(1-a_nx)$$
$$\geqq b_n(1-x)^n$$

この不等式を $[0,1]$ において積分すると

$$\int_0^1 I_n(x)dx\geqq\int_0^1 b_n(1-x)^n dx=\left[-\frac{b_n}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1=\frac{b_n}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_n}{n}}{1+\frac{1}{n}}=1$ と(2)より はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 I_n(x)dx=1$ であることが示される.

③

(1) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ について．$\sqrt{x}=t$ とすると $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2t}$，

x	$0\to1$
t	$0\to1$

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 e^t\times2t\,dt=2\int_0^1 te^t dt=2\left\{[te^t]_0^1-\int_0^1 e^t dt\right\}$$

$$=2[te^t-e^t]_0^1=2$$

$\int_1^e(\log y)^2dy$ について　$\log y=t$ とすると $\dfrac{dt}{dy}=\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{e^t}$

y	$1\to e$
t	$0\to1$

$$\int_1^e(\log y)^2dy=\int_0^1 t^2e^t dt=[t^2e^t]_0^1-2\int_0^1 te^t dt=e-2$$

$$\therefore\ \int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx+\int_1^e(\log y)^2dy=2+e-2=\underline{e}$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2x}$，

y	$0\to1$
x	$0\to\frac{\pi}{4}$

より．

$$\int_1^e f^{-1}(y)dy=\int_1^e x\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\frac{1}{\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\tan x)'dx$$

$$=[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx.$$

したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx+\int_0^1 f^{-1}(y)dy=\underline{\frac{\pi}{4}}$$

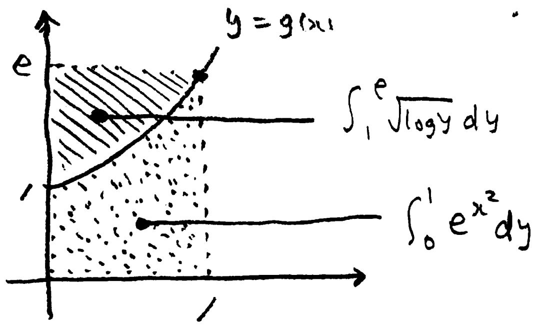
また $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\log1=\frac{1}{2}\log2$$

となるので

$$\int_0^1 f^{-1}(y)dy=\underline{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log2}$$

(3) $g(x)=e^{x^2}$ とすると $g'(x)=2xe^{x^2}$ は $x\geqq0$ において正または 0 となるので，$g(x)$ は単調に増加する．したがって $x\geqq0$ において，$g(x)$ の逆関数は存在する．

$x\geqq0$ のとき，$y=e^{x^2}\iff\log y=x^2\iff x=\sqrt{\log y}$ となるので，$y=\sqrt{\log x}$ は $g(x)$ の逆関数であるので，$\int_0^1 e^{x^2}dx$ および $\int_1^e\sqrt{\log y}\,dy$ はそれぞれ次図の面積を表している



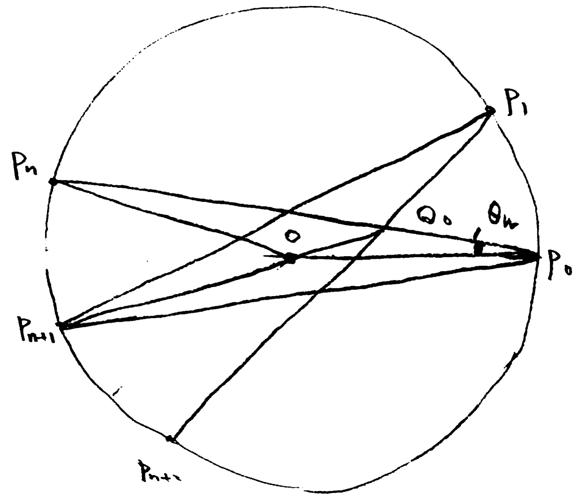
よって $\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e \sqrt{\log y}\, dy = 1 \times e = \underline{e}$.

④

(1)

Q_0は P_0P_nとP_1P_{n+1}の交点だから

右図の点



$$\angle P_0OP_n = \frac{2\pi}{2n+1}\times n$$

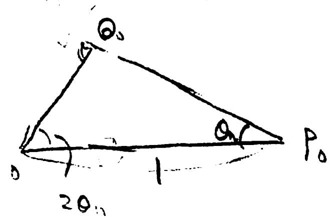
だから

$$\angle OP_0Q_0 = \frac{\pi - \angle P_0OP_n}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

対称性より Q_0 O P_{n+1} は一直線上にあるので $\angle P_0OQ_0 = 2\angle P_0P_{n+1}O = \frac{\pi}{2n+1}$

(2) 正弦定理より



$$\frac{1}{\sin(\pi-3\theta_n)} = \frac{P_0Q_0}{\sin 2\theta_n}$$

$$P_0Q_0 = \frac{\sin 2\theta_n}{\sin 3\theta_n}$$

$$\triangle OP_0Q_0 = \frac{1}{2}\times 1\times P_0Q_0\times \sin\theta_n = \frac{\sin 2\theta_n \sin\theta_n}{2\sin 3\theta_n}$$

(3) $$A_n = (2n+1)\times 2\times \triangle OP_0Q_0 = \frac{(2n+1)\sin 2\theta_n \sin\theta_n}{\sin 3\theta_n}$$

$$= \frac{3\theta_n}{\sin 3\theta_n}\times\frac{\sin 2\theta_n}{2\theta_n}\times\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\times\frac{2}{3}\theta_n\times(2n+1)$$

$\theta_n(2n+1) = \frac{\pi}{2}$ だから

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 1\times1\times1\times\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$