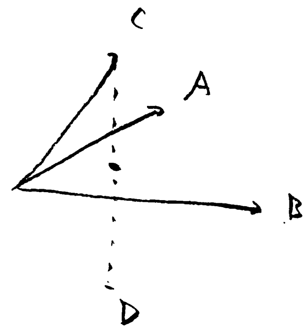
①

(1) C, Dの中点は平面上にあるので



$\frac{1}{2}\vec{OC}+\frac{1}{2}\vec{OD} = \frac{1}{2}s\vec{OA}+\frac{1}{2}t\vec{OB}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}u\right)\vec{OC}$

より　$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}u=0$　　$\therefore u=-1$.

CD ⊥ OAB より

$\vec{CD}\cdot\vec{OA}=0$, かつ　$\vec{CD}\cdot\vec{OB}=0$.

$(s\vec{OA}+t\vec{OB}-\vec{OC}-\vec{OC})\cdot\vec{OA} = s\times2+t\times0-2\cdot1=2s-2=0$

$(s\vec{OA}+t\vec{OB}-2\vec{OC})\cdot\vec{OB} = s\times0+t\times18-2\times27=0$

$\therefore s=1, t=3$.

以上より　$(s, t, u)=\underline{(1, 3, -1)}$

(2) $|\vec{CD}| = |\vec{OA}+3\vec{OB}-2\vec{OC}| = \left|\begin{pmatrix}1+3-8\\-1+3-6\\0+12-10\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2+2^2} = 6$

$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$ だから △OABの面積は　$|\vec{OA}||\vec{OB}|\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{18} = 3$

よってOABCの体積は

$3\times\frac{6}{2}\times\frac{1}{3} = \underline{3}$

(3) $\vec{AC}=(3, 4, 5)$, $\vec{BC}=(3, 2, 1)$

$|\vec{AC}|=5\sqrt{2}$, $|\vec{BC}|=\sqrt{14}$.　$\vec{AC}\cdot\vec{BC}=9+8+5=22$.

△ABCの面積は

$\frac{1}{2}\sqrt{(5\sqrt{2})^2\times\sqrt{14}^2-22^2} = \frac{1}{2}\times6\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

△ABCを底面としたとき、OからABCまでの距離(これをhとする)は、OABCの高さに相当するので

$3 = 3\sqrt{6}\times h\times\frac{1}{3}$　　よって $h=\frac{3}{\sqrt{6}}=\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

② (1)

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}$$

$$-)\ rS_n = \quad r + 2r^2 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n$$

$$(1-r)S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n$$

$$= \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$$

$$S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \underline{\frac{1}{(1-r)^2}}$$

(2) (i) $p_1 + q_1 = \frac{4}{5} + \left(1-\frac{4}{5}\right)\times\frac{1}{2} = \underline{\frac{9}{10}}$

(ii) $p_n = \left\{\left(1-\frac{4}{5}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}^{n-1} \times \frac{4}{5} = \underline{\frac{4}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}$

(iii) $q_n = \left\{\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}^{n-1} \times \left(1-\frac{4}{5}\right)\times\frac{1}{2} = \underline{\left(\frac{1}{10}\right)^n}$

(3)

$$E = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\times\frac{4}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{8}{5}n\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{8}{5}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{10}\right)^2} - \frac{4}{5}\times\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{160}{81} - \frac{8}{9} = \underline{\frac{88}{81}}$$

③ $f(x) = e^{-x}x^2(x^2+ax+b)$

(1) $f'(x) = -e^{-x}\cdot x^2(x^2+ax+b) + e^{-x}\times 2x(x^2+ax+b) + e^{-x}x^2(2x+a)$

$= e^{-x}\left(-x^4-ax^3-bx^2+2x^3+2ax^2+2bx+2x^3+ax^2\right)$

$= e^{-x}(-x^4-ax^3+4x^3+3ax^2-bx^2+2bx)$

$f(-1) = e\cdot(1-a+b) = 10e$

$f'(1) = -1-a+4+3a-b+2b = 2a+b+3 = 0$

連立して $\underline{a=-4,\ b=5}$

(2) $f(x) = e^{-x}x^2(x^2-4x+5)$

$f'(x) = -e^{-x}x(x-1)(x-2)(x-5)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$x^2-4x+5 = (x-2)^2+1 \geqq 1 > 0$ だから. $f(x)=0$ となるのは $x=0$ のみ.

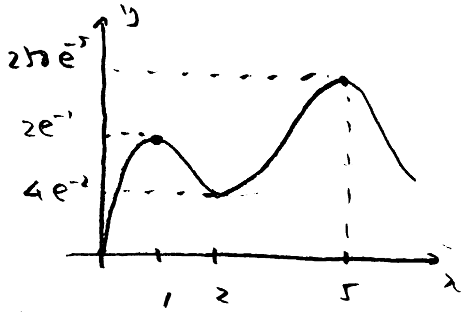
$f(x)$ の $x \geqq 0$ における増減は

x	0	…	1	…	2	…	5	…
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	0	↗		↘		↗		↘

$f(1) = 2e^{-1}$

$f(2) = 4e^{-2}$

$f(5) = 250e^{-5}$



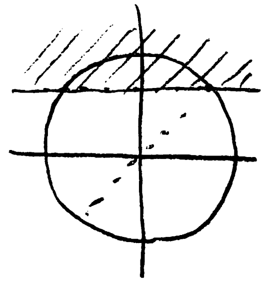
$\dfrac{2e^{-1}}{250e^{-5}} = \dfrac{e^4}{125} < \dfrac{3^4}{125} < 1$.

だから $2e^{-1} < 250e^{-5}$

よって $x \geqq 0$ における $f(x)$ の

最大値は $250e^{-5}$ $(x=5)$, 最小値は 0 $(x=0)$.

④



(1) $f(x) = \cos x + \sin x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \quad \Leftrightarrow \quad \underline{0 < x < \frac{\pi}{2}}$

(2) $\int x(\cos x + \sin x - 1)\,dx = x(\sin x - \cos x - x) - \int \sin x - \cos x - x \, dx$

$= x\sin x - x\cos x - x^2 + \cos x + \sin x + \frac{1}{2}x^2 + C$

$= -\frac{1}{2}x^2 + (1+x)\sin x + (1-x)\cos x + C$ （Cは積分定数）

(3) $\int_0^{2\pi} t|f(t)|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t f(t)\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} t f(t)\,dt$

$= \left[-\frac{1}{2}t^2 + (1+t)\sin t + (1-t)\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{1}{2}t^2 + (1+t)\sin t + (1-t)\cos t\right]_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2\left(-\frac{\pi^2}{8} + 1 + \frac{\pi}{2}\right) - 1 - (-2\pi^2 + 1 - 2\pi) = \frac{7}{4}\pi^2 + 3\pi$

(4) $\int_0^{2\pi} t\,g(t)\,dt = I$ とおくと

$g(x) = |f(x)| - \frac{1}{4\pi^2}(I - 3\pi)$

$I = \int_0^{2\pi} t|f(t)| - t\frac{1}{4\pi^2}(I - 3\pi)\,dt$

$= \frac{7}{4}\pi^2 + 3\pi - \frac{1}{4\pi^2}(I - 3\pi) \times \frac{(2\pi)^2}{2}$

$= \frac{7}{4}\pi^2 + 3\pi - \frac{1}{2}I + \frac{3}{2}\pi$

$I = \frac{7}{6}\pi^2 + 3\pi$

よって $\underline{g(x) = |\cos x + \sin x - 1| - \frac{7}{24}}$