①

(1) $w = x + yi$ とおく (x, y は実数)

$z_{n+1} = w z_n$

$\Leftrightarrow$ $a_{n+1} + b_{n+1} i = (x+yi)(a_n + b_n i)$

$\Leftrightarrow$ $\frac{\sqrt{2}}{4} a_n - \frac{\sqrt{6}}{4} b_n + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} a_n + \frac{\sqrt{2}}{4} b_n\right) i = x a_n + x b_n i + y a_n i - y b_n$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4} a_n - \frac{\sqrt{6}}{4} b_n = x a_n - y b_n \\ \frac{\sqrt{6}}{4} a_n + \frac{\sqrt{2}}{4} b_n = y a_n + x b_n \end{cases}$$

$x = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $y = \frac{\sqrt{6}}{4}$. $\therefore \underline{w = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} i}$

$|w| = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(2) $w = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

これは z_{n+1} が点 z_n を $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍に拡大してから 60° 回転させた点であることを示している.

(3) (1) より

$z_n = w z_{n-1} = w^2 z_{n-2} = \cdots = w^{n-1} z_1$

$w = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ なので $w^{n-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\left(\cos 60^\circ(n-1) + i \sin 60^\circ(n-1)\right)$

よって

$z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\left(\cos 60^\circ(n-1) + i \sin 60^\circ(n-1)\right)(2 + 2i)$

$= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}\left\{\cos(60^\circ n - 60^\circ) + i \sin(60^\circ n - 60^\circ)\right\}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

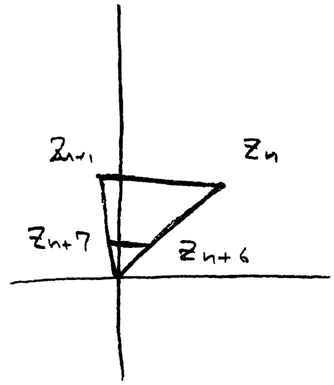
$= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}\left(\cos(60^\circ n - 15^\circ) + i \sin(60^\circ n - 15^\circ)\right)$

$\therefore a_n = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n} \cos(60^\circ n - 15^\circ)$, $b_n = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n} \sin(60^\circ n - 15^\circ)$

(4)

$z_{n+6} = \omega^6 z_n = \frac{1}{8} z_n$

$z_{n+7} = \omega^6 z_{n+1} = \frac{1}{8} z_{n+1}$



となることから、T_{n+6} は T_n の内側に含まれてしまうことになる。

したがって、黒く塗りつぶされる領域は

$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ までの領域と一致する。

また $T_1 \sim T_6$ については、60°ずつ回転した図形となっているので

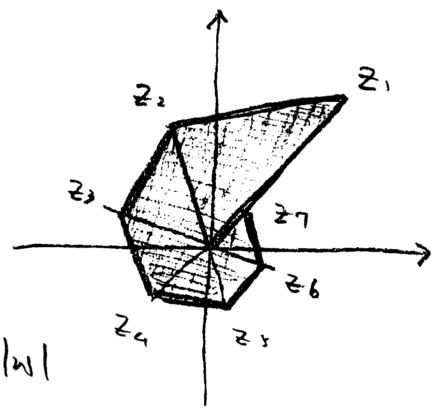
これらは重なる部分をもたない

$z_2 = \omega z_1$ だから $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = |\omega| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|z_1| = |2+2i| = 2\sqrt{2}$

よって $\triangle O z_1 z_2$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sin 60^\circ = \sqrt{6}$$



$\triangle O z_1 z_2$ は $\triangle O z_2 z_3$ と相似でその比は $|\omega|$

であり面積は $|\omega|^2 = \frac{1}{2}$ 倍となっている。

よって $\triangle O z_2 z_3$ の面積は $\sqrt{6} \times \frac{1}{2}$

以下同様に考えられるので、もとめる面積は

$$\sqrt{6} + \sqrt{6} \times \frac{1}{2} + \cdots + \sqrt{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \sqrt{6} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{6}\left(1 - \frac{1}{64}\right)$$

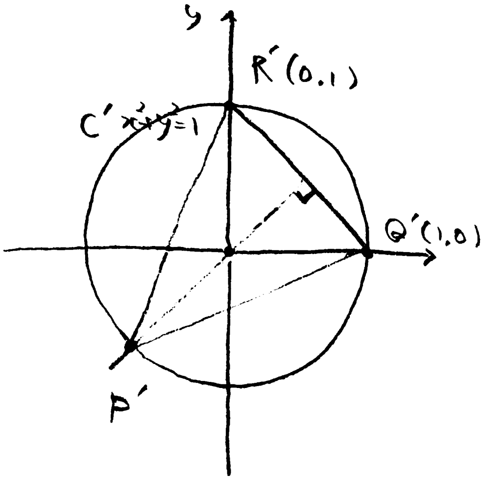
$$= \frac{63\sqrt{6}}{32}$$

②

(1) C: $\dfrac{x^2}{2^2}+y^2=1$ は長軸半径2、短軸半径1、中心が原点のだ円。

そこで、Cなどを全て、x軸方向に$\frac{1}{2}$倍した図形を考え、これらをC', P', Q', R'とすると、右下図のようになる。

このときP'はR', Q'から最も離れた点となったとき△P'Q'R'は最大となるが、それはR'Q'の垂直二等分線とC'が交わるときである。すなわち、P'が偏角が225°となる$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき最大。



このとき $P'Q'=\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$=\sqrt{2+\sqrt{2}}$

となるので $\triangle P'Q'R'=\frac{1}{2}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}^{\,2}\times\sin\angle Q'P'R'$

$=\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})\times\sin\frac{\angle Q'OR'}{2}$

$=\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

△PQRは△P'Q'R'をx軸方向に2倍したものなので

△PQRの面積は $\underline{1+\sqrt{2}}$

また、このときPは$\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$すなわち $\underline{\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}$

(2) $\angle P'OQ'=135°$よりC'で囲まれた図形の直線P'Q'より下側の面積は $\pi 1^2\times\frac{135°}{360°}-\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin 135°=\frac{3}{8}\pi-\frac{\sqrt{2}}{4}$

(1)と同様なので、

2倍に拡大した値がもとめる面積 $\underline{\frac{3}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

③

(1) $x=4,\ y=-11$ は $25x+9y=1$ を満たす.

すなわち. $25\times4+9(-11)=1$ であるが、これを $25x+9y=1$ から

辺々引くと

$$25(x-4)+9(y+11)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 25(x-4)=-9(y+11)$$

右辺は9の倍数、左辺は25の倍数なので、上式は $9\times25\times n$ (nは整数)

と表すことができる.

$$25(x-4)=-9(y+11)=9\times25\times n \qquad (n\text{は整数})$$

$$\begin{cases} x-4=9n \\ y+11=-25n \end{cases} \Leftrightarrow \underline{(x,y)=(9n+4,\ -11-25n)\quad (n\text{は整数})}$$

(2) $25x=33-9y=3(11-3y)$ となるので x は3の倍数.

そこで、$x=3x'$ と表す (x'は整数)

与式は $\quad 3x'\times25+9y=33 \Leftrightarrow 25x'+3y=11$

これを満たす整数解の1つとして、$(x',y)=(2,-13)$ がある.

(1)と同様に考えて.

$$25(x'-2)+3(y+13)=0$$

$$25(x'-2)=-3(y+13)=25\times3\times n \qquad (n\text{は整数})$$

$$\begin{cases} x'-2=3n \\ y+13=-25n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=3n+2 \\ y=-25n-13 \end{cases}$$

$$\therefore\ \underline{(x,y)=(9n+6,\ -25n-13)} \qquad (n\text{は整数})$$

$|x+y|=|-16n-7|=|16n+7|$ これは $n=0$ のとき最小となり.

このとき $\underline{x=6,\ y=-13}$

(3)

$(x, y) = (9n+6, -25n-13)$ を代入.

$$(9n+6)(-25n-13) = -570$$

$$\Leftrightarrow \quad (3n+2)(25n+13) = 190 = 2 \times 5 \times 19$$

$(3n+2, 25n+13) = (\pm1, \pm190), (\pm2, \pm95), (\pm5, \pm38)$

$, (\pm19, \pm10), (\pm10, \pm19), (\pm38, \pm5)$

$, (\pm95, \pm2), (\pm190, \pm1)$

$3n+2$ は 3 で割った余りが 2 であることから,

$$3n+2 = -1, +2, +5, -19, -10, 38, 95, -190$$

にしぼられ,

$$n = -1, 0, 1, -7, -4, 12, 31, -64.$$

このとき $25n+13$ が正しい符となるのは

$$n = 1,$$

のときに限られる。このとき、

$$(x, y) = \underline{(15, -38)}$$

④

(1) $f'(x) = 2\times\frac{1}{2}\times\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 2ax = \frac{2x\left(1-a\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$

$f'(x)=0$ となるのは $x=0$ または $a\sqrt{1+x^2}=1$ のとき

$a\sqrt{1+x^2}=1 \iff 1+x^2=\frac{1}{a^2} \iff x^2=\frac{1-a^2}{a^2}$ …①

ここで $1-a^2 \geqq 0$ すなわち $0<a\leqq 1$ のとき、$x=\pm\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

$a>1$ のときは ① を満たす x は存在しない

(i) $0<a\leqq 1$ のとき、

$f(x)$ の増減は右のようになる

x	…	$-\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	…	0	…	$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

$f\left(\pm\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right) = 2\sqrt{1+\frac{1-a^2}{a^2}} - \frac{1-a^2}{a^2}\times a$

$= \frac{2}{a} - \frac{1}{a} + a = a + \frac{1}{a}$

(ii) $a>1$ のとき

$f(x)$ の増減は右のようになり、

$f(0)=2$

x	…	0	…
f'	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

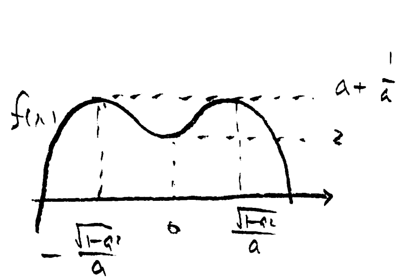
以上より $f(x)$ の最大値は

$$\begin{cases} 0<a\leqq 1 \text{ のとき} & a+\frac{1}{a} \\ a>1 \text{ のとき} & 2 \end{cases}$$

(2) (1)より $0<a\leqq 1$ のときの方が、$a>1$ のときよりも凹凸が多くなるので、$0<a\leqq 1$ であることが必要。

このとき、$f(x)$ のグラフは右のように

なっているので、



$y=f(x)$ と $y=b$ の交点が最も多くなるのは

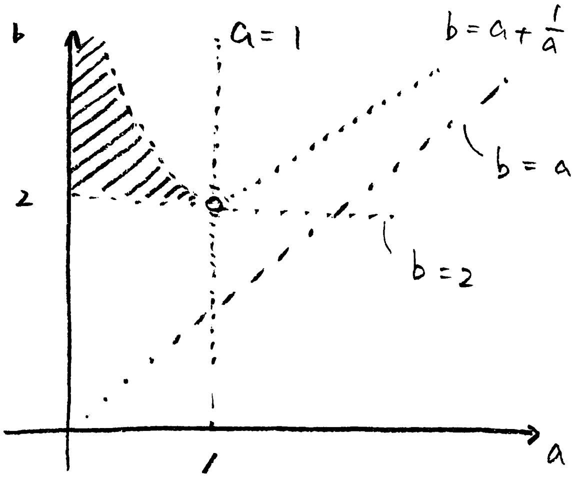
$$2<b<a+\frac{1}{a}$$

が成り立つときである。

以上より条件をまとめると

$$0<a\leqq 1,\ かつ,\ b>2,\ かつ\ b<a+\frac{1}{a}$$

これを図示すると



上図斜線部.（境界除く）