③

1回目　2回目　3回目

(1) (0, 0, 0) のとき (1, 0) → (3, 0) → (5, 0)

(0, 0, U) 〃 (1, 0) → (3, 0) → (3, 1)

(0, U, 0) 〃 (1, 0) → (1, 1) → (2, 1)

(0, U, U) 〃 (1, 0) → (1, 1) → (1, 3)

(U, 0, 0) 〃 (0, 1) → (1, 1) → (3, 1)

(U, 0, U) 〃 (0, 1) → (1, 1) → (1, 2)

(U, U, 0) 〃 (0, 1) → (0, 3) → (1, 3)

(U, U, U) 〃 (0, 1) → (0, 3) → (0, 5)

(5, 0), (3, 1), (2, 1), (1, 2), (1, 3), (0, 3)

(2) 3回目終了時点で (3, 3) へと移動できる可能性のあるものは

(0, 0, 0) と (U, U, U) を除く 6通りある

3回目まで

(i) (0, 0, U) のとき

4回目が U なら (3, 3) へと移動する　(0, 0, U, U)

(ii) (0, U, 0) のとき

4回目が 0 なら (4, 1) へと移動してしまうので

(0, U, 0, U, 0, U)

(iii) (0, U, U) のとき

4回目は 0 に限られるが、このとき、5回目に (3, 3) へ移る方法はない

(iv) (U, 0, 0), (U, 0, U), (U, U, 0) のとき

(i)〜(iii) と、対称性を考えて

(U, U, 0, 0), (U, 0, U, 0, U, 0)

まとめると

(0, 0, U, U), (U, U, 0, 0), (0, U, 0, U, 0, U), (U, 0, U, 0, U, 0)

④

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}\left(1 - \frac{a-3}{x} - \frac{2a-3}{x^2}\right) = 0 \times (1-0-0) = \underline{0}$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty} f(-t) = \lim_{t\to\infty} e^t x^2\left(1 - \frac{a-3}{x} - \frac{2a-3}{x^2}\right) = \infty$

(2) $f'(x) = -e^{-x}\{x^2-(a-3)x-(2a-3)\} + e^{-x}(2x-a+3)$

$= e^{-x}(-x^2+ax-3x+2a-3+2x-a+3)$

$= e^{-x}(-x^2+ax-x+a)$

$= e^{-x}(-x+a)(x+1)$

$f'(x)=0$ となるのは $x=a, -1$.

したがって $f(x)$ の増減は右のようになる

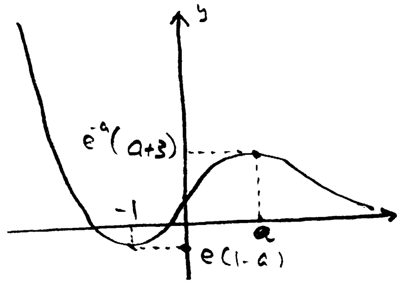
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	a	$\cdots$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘		↗		↘

$f(-1) = e(1+a-3-2a+3) = e(1-a) < 0$.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ だから、$f(x)$ は $x=-1$ のとき最小値 $\underline{e(1-a)}$ をとる

(3) $y=f(x)$ のグラフは右のようになる

$f(a) = e^{-a}(a+3)$, $f(-1) = e(1-a)$



このグラフと $y=k$ のグラフの交点の数と $f(x)=k$ の解の数が一致するので

$$\begin{cases} 0 < k < e^{-a}(a+3) \text{ のとき } & 3\text{個} \\ k = e^{-a}(a+3) \text{ のとき } & 2\text{個} \\ k > e^{-a}(a+3) \text{ のとき } & 1\text{個} \end{cases}$$

(4) $\displaystyle\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$ （Cは積分定数）

$\displaystyle\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) + C$

$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$ （Cは積分定数）

(5) $\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b \{x^2-(a-3)x-(2a-3)\}e^{-x}dx$

$= \Big[-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}-(a-3)(-xe^{-x}-e^{-x})+(2a-3)e^{-x}\Big]_0^b$

$= -b^2e^{-b}-2be^{-b}-2e^{-b}+(a-3)be^{-b}+(a-3)e^{-b}+(2a-3)e^{-b}$

$\quad -(-0-0-2+0+(a-3)+2a-3)$

$= e^{-b}(-b^2-2b-2+(a-3)b+a-3+2a-3)-3a+8$

$\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,dx = -3a+8$

よって $a=\frac{8}{3}$ とすれば題意が成り立つ。 $\underline{a=\frac{8}{3}}$

⑤

(1) C_0の式の両辺をxで微分する

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$$

$y\neq 0$のとき $\dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}}$

よって(a, b)における接線は

$$y=-\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{3}}(x-a)+b$$

$$y+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}x=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}a+b \quad \cdots ①$$

ここで、(a, b)はC_0上にあるので $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=c^2$ となることに注意して①を変形すると、①は

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{3}}x+\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{3}}y=a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=c^2.$$

$$\therefore\ \underline{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{3}}x+\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{3}}y=c^2}$$

(2) Qはlと$x=0$の交点なので $\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{3}}y=c^2$ より $y=b^{\frac{1}{3}}c^2$

Q$(0, b^{\frac{1}{3}}c^2)$

同様に P$(a^{\frac{1}{3}}c^2, 0)$

MはPQの中点なので $\underline{\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}a^{\frac{1}{3}}c^2, \frac{1}{2}b^{\frac{1}{3}}c^2\right)}$

(3)

$$|\overrightarrow{OM}|^2=\frac{1}{4}a^{\frac{2}{3}}c^4+\frac{1}{4}b^{\frac{2}{3}}c^4=\frac{1}{4}c^4(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=\frac{1}{4}c^4\cdot c^2=\frac{1}{4}c^6=\left(\frac{1}{2}c^3\right)^2$$

これはOMの長さが一定値 $\frac{1}{2}c^3$ であることを示している

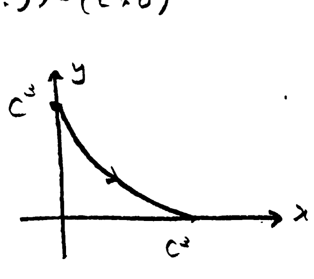
証明終

(4) 面積をSとする

$\theta=0$のとき $(x, y)=(0, c^3)$ $\theta=\frac{\pi}{2}$のとき $(x, y)=(c^3, 0)$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$のとき $y\geqq 0$.

$$\frac{dx}{d\theta}=3c^3\sin^2\theta\cos\theta$$



以上より、もとめる面積は

$$S = \int_0^{c^3} y \, dx$$

$$= \int_0^{c^3} c^3 \cos\theta \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^3 \cos^3\theta \times 3c^3 \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= 3c^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^4\theta \, d\theta$$

$$= \frac{3}{8} c^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta)(1 + \cos 2\theta)^2 \, d\theta$$

$$= \frac{3}{8} c^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos 2\theta - \cos^2 2\theta - \cos^3 2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{3}{8} c^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos 2\theta - \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) - \cos 2\theta (1 - \sin^2 2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{3}{8} c^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta + \sin^2 2\theta (\sin 2\theta)' \times \frac{1}{2} \, d\theta$$

$$= \frac{3}{8} c^6 \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta + \frac{1}{6}\sin^6 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{8} c^6 \left(\frac{\pi}{4} - 0 + 0 - 0 - 0 + 0 \right) = \frac{3}{32}\pi c^6$$