①

(1) 2つの曲線を表す式を連立する

$$\frac{x-3}{x-4} = \frac{1}{4}(x-1)(x-3)$$

$\Leftrightarrow \quad 4(x-3) = (x-1)(x-3)(x-4)$

$\Leftrightarrow \quad (x-3)x(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0,\ 3,\ 5.$

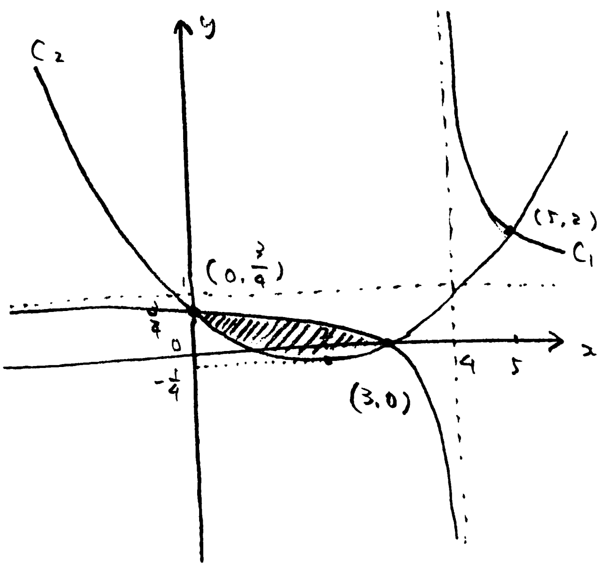
これを曲線の式に代入して $\underline{(x, y) = \left(0, \frac{3}{4}\right), (3, 0), (5, 2)}$ //

(2)

$C_1 : \ y = 1 + \dfrac{1}{x-4}$

$C_2 : \ y = \dfrac{1}{4}(x-2)^2 - \dfrac{1}{4}$

グラフは右のとおり



よって囲まれる図形は右図斜線部で、その面積Sは

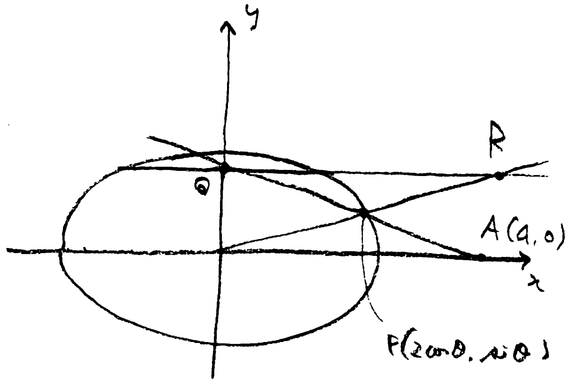
$$S = \int_0^3 \frac{x-3}{x-4} - \frac{1}{4}(x-1)(x-3)\,dx$$

$$= \int_0^3 1 + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{4}(x-2)^2 + \frac{1}{4}\,dx$$

$$= \left[x + \log|x-4| - \frac{1}{12}(x-2)^3 + \frac{1}{4}x\right]_0^3$$

$$= \frac{15}{4} - \frac{1}{12} - 2\log 2 - \frac{2}{3} = \underline{3 - 2\log 2}.$$ //

② (1) QはAP上にあるので



$$\vec{OQ}=\vec{OA}+k\vec{AP}$$
$$=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\cos\theta-a\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

Qのx座標は0となることから $k=\dfrac{-a}{2\cos\theta-a}$

よって

$$\vec{OQ}=\left(0,\ \frac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)$$

直線OPは $y=\dfrac{\sin\theta}{2\cos\theta}x$, QRは $y=\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}$ と表せるので、その交点は

$\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{2\cos\theta}x$ より $x=\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta}$, $y=\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}$

$$\underline{R\left(\frac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta},\ \frac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)}$$

(2)

$$f(\theta)=\frac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}$$

$$f'(\theta)=\frac{a\cos\theta(a-2\cos\theta)-a\sin\theta\times2\sin\theta}{(a-2\cos\theta)^2}=\frac{a(a\cos\theta-2)}{(a-2\cos\theta)^2}$$

$f'(\theta)=0$ となるのは $a\cos\theta=2$ すなわち $\cos\theta=\dfrac{2}{a}$ となるときで、$a>2$ だから

$0<\theta<\pi$ の範囲に、これを満たす θ はただ1つ存在する(これを α とする)

このとき $f(\theta)$ の増減は

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗		↘	

ただし α は

$\cos\alpha=\dfrac{2}{a}$, $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}$

$$f(\alpha)=\frac{a\sin\alpha}{a-2\cos\alpha}=\frac{a\,\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}}{a-2\,\frac{2}{a}}=\frac{a\sqrt{a^2-4}}{a^2-4}=\frac{a}{\sqrt{a^2-4}}$$

よって $0<\theta<\pi$ における $f(\theta)$ の最大値は $\dfrac{a}{\sqrt{a^2-4}}$

(3) $g(\theta) = \left(\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)^2$

$$= \frac{a^2}{(a-2\cos\theta)^2}(3\cos^2\theta+1)$$

$\cos\theta = t$ とすると　$0<\theta<\pi$ より　$-1<t<1$

$$g(\theta) = \frac{a^2(3t^2+1)}{(2t-a)^2} \quad (= h(t) \text{ とおく})$$

$$h'(t) = \frac{a^2(6t)(2t-a)^{\cancel{2}} - a^2(3t^2+1)\times 2\cancel{(2t-a)}\times 2}{(2t-a)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2a^2(\cancel{6t^2}-3at-\cancel{6t^2}-2)}{(2t-a)^3}$$

$$= \frac{-2a^2(3at+2)}{(2t-a)^3}$$

$h'(t)=0$ となるのは $t=-\dfrac{2}{3a}$ のときで

$h(t)$ の増減は右のようになる.

t	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3a}$	$\cdots$	1
$h'(t)$	/	$-$	0	$+$	/
$h(t)$	/	↘		↗	/

$$h\left(-\frac{2}{3a}\right) = \frac{a^2\left(3\times\frac{4}{9a^2}+1\right)}{\left(-\frac{4}{3a}-a\right)^2} = \frac{a^2(12+9a^2)}{(4+3a^2)^2} = \frac{3a^2}{4+3a^2}$$

よって $g(\theta)$ の最小値は $\underline{\dfrac{3a^2}{4+3a^2}}$

③

$x^4-2(a+1)x^3+3ax^2=f(x)$ とおく

(1) $f'(x)=4x^3-6(a+1)x^2+6ax$

$f''(x)=12x^2-12(a+1)x+6a$

$=6\left(2x^2-2(a+1)x+a\right)$

Cが2つの変曲点をもつのは、$2x^2-2(a+1)x+a=0$ が異なる2つの解をもつときで、これらをα,βとする（$\alpha<\beta$とする）

条件より　$\beta-\alpha=\sqrt{2}$ …①

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=a+1$,　$\alpha\beta=\frac{a}{2}$ …②

異なる2解をもつので 判別式をDとして

$D/4=(a+1)^2-2a>0$ …③

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ に①,②を代入

$2=(a+1)^2-2a$

$a^2=1$

$\therefore\ a=\pm1$

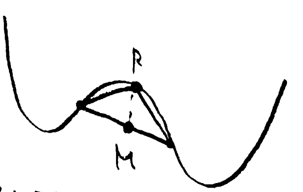
aは正の実数だから $a=1$ 、これは②を満たしている。　$\therefore\ \underline{a=1}$ //

(2) $a=1$のとき

$f(x)=x^4-4x^3+3x^2$

$\alpha+\beta=2$,　$\alpha\beta=\frac{1}{2}$

P,Qの中点は $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)$ これをMとする



Rのy座標は $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=1-4+3=0$.

$\frac{1}{2}\left(f(\alpha)+f(\beta)\right)=\frac{1}{2}\left(\alpha^4-4\alpha^3+3\alpha^2+\beta^4-4\beta^3+3\beta^2\right)$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times\frac{1}{2}=3$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

$$=2\times\left(3-\frac{1}{2}\right)=5$$

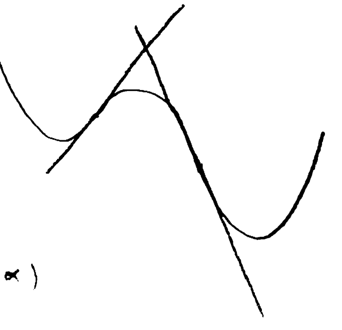
$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=9-2\times\frac{1}{4}=\frac{17}{2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\left(f(\alpha)+f(\beta)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{17}{2}-4\cdot5+3\cdot3\right)=-\frac{5}{4}$$

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\times\overline{RM}\times\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times\left(0+\frac{5}{4}\right)\times\sqrt{2}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

(3)

Pのx座標がαだとする。



Pにおける接線は $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$

これと$f(x)$を連立して

$$x^4-4x^3+3x^2=f'(\alpha)x-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)$$

これは4次方程式であるが、接線は変曲点における接線なので、この4次方程式は$x=\alpha$を3重解にもつ。

したがって、P'のx座標をα'として、解と係数の関係より、

$$3\alpha+\alpha'=4.$$

同様にQについて、

$$3\beta+\beta'=4.$$

$$\therefore\ \frac{\alpha'+\beta'}{2}=\frac{4-3\alpha+4-3\beta}{2}=4-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)=4-\frac{3}{2}\times2=1.$$

④

(1) $$x_k = \frac{p(k+1)(k+3)+qk(k+3)+rk(k+1)}{k(k+1)(k+3)} = \frac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)} \quad \cdots (*)$$

これが全てのkについて成り立つとき

$$p(k+1)(k+3)+qk(k+3)+rk(k+1) = 2ak+6b \quad \cdots ①$$

も全てのkについて成り立つ。

①で$k=0$とすると　$3p=6b$　　$p=2b$

①で$k=-1$　〃　$-2q=-2a+6b$　　$q=a-3b$

①で$k=-3$　〃　$6r=-6a+6b$　　$r=-a+b$

$(p,q,r)=(2b,\ a-3b,\ -a+b)$とすると すべての自然数に対して(*)は成り立つので

$\underline{(p,q,r)=(2b,\ a-3b,\ -a+b)}$

(2) $b=0$のとき

$$x_k = \frac{2ak}{k(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1}-\frac{a}{k+3}$$

よって $$\sum_{k=1}^{n} x_k = a\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right) = a\left\{\left(\frac12-\cancel{\frac14}\right)+\left(\frac13-\cancel{\frac15}\right)+\left(\cancel{\frac14}-\cancel{\frac16}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac1n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$= a\left(\frac12+\frac13-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) = \underline{\frac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}}$$

$a=0$のとき

$$x_k = \frac{6b}{k(k+1)(k+3)} = \frac{2b}{k}+\frac{-3b}{k+1}+\frac{b}{k+3} = \left(\frac{2b}{k}-\frac{2b}{k+1}\right)-\left(\frac{b}{k+1}-\frac{b}{k+3}\right)$$

よって $$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2b}{k}-\frac{2b}{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b}{k+1}-\frac{b}{k+3}\right)$$

$$= 2b-\frac{2b}{n+1}-\left(\frac{b}{2}+\frac{b}{3}-\frac{b}{n+2}-\frac{b}{n+3}\right)$$

$$= \frac76 b-\frac{2b}{n+1}+\frac{b}{n+2}+\frac{b}{n+3} = \underline{\frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}}$$

(3)　(2) より

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{2ak}{k(k+1)(k+3)} + \frac{6b}{k(k+1)(k+3)} \right\}$$

$$= \frac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)} + \frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{a\left(5+\frac{13}{n}\right)}{6\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} + \frac{b\left(7+\frac{42}{n}+\frac{59}{n^2}\right)}{6\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}$$

$$\longrightarrow \frac{a \times 5}{6 \times 1 \times 1} + \frac{b \times 7}{6 \times 1 \times 1 \times 1} = \underline{\frac{5}{6}a + \frac{7}{6}b}$$

⑤

(1) $a=b>c$ のとき $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$

三角形の成立条件より $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{a}$

a,c についての条件をまとめると

$$a>c,\quad \frac{1}{a}<\frac{1}{c}<\frac{2}{a}$$

$$\Leftrightarrow\quad c<a<2c$$

(i) $c=1$ のとき $1<a<2$ を満たす a は存在しない

(ii) $c=2$ 〃 $2<a<4$ より $a=3$

(iii) $c=3$ 〃 $3<a<6$ より $a=4,5$

(iv) $c=4$ 〃 $4<a<8$ より $a=5,6,7$

(v) $c=5$ 〃 $5<a<10$ より $a=6,7$ $(\because a\leqq 7)$

(vi) $c=6$ 〃 $6<a<10$ より $a=7$

(vii) $c=7$ 〃 $7<a<14$ より a は存在しない

以上より、$a=b>c$ のとき $(*)$ を満たす (a,b,c) の組みは 9通り

(ii) $a>b>c$ のとき $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$

三角形の成立条件より $a<b+c$, $a>b-c$, $\frac{1}{c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}>\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$ …①

$a>b>c$ で、a,b,c は1以上7以下の自然数なので a は 3, 4, 5, 6, 7 のいずれか

(i) $a=3$ のとき $(b,c)=(2,1)$ となるが、これは ① を満たさない

(ii) $a=4$ 〃 $(b,c)=(3,2),(3,1),(2,1)$ となる。このうち ① を満たすものは

$(b,c)=(3,2)$ のみ

(iii) $a=5$ のとき $5<b+c$, $5>b-c$ を満たすのは $(b,c)=(4,3),(4,2)$

このうち ① を満たすのは $(b,c)=(4,3)$ のみ

(iv) $a=6$ のとき $6<b+c$, $6>b-c$ を満たすのは

$(b,c)=(5,4),(5,3),(5,2),(4,3)$

このうち ① を満たすのは $(b,c)=(5,4),(5,3),(4,3)$

(v) $a=7$ のとき $7<b+c$, $7>b-c$ を満たすのは、

$(b,c)=(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(5,4),(5,3)$

このうち①を満たすのは

$(b,c)=(6,5),(6,4),(5,4),(5,3)$

以上より、$a>b>c$ のとき (*) を満たすのは 9通り。

(3) $a=b<c$ であり、(*) を満たすのは

$a=1\sim7$ を順に調べる

まず $c<2a$ を満たすものを考えると、

$(a,c)=(2,3),(3,4),(3,5),(4,5),(4,6),(4,7),(5,6)$
$(5,7),(6,7)$

これらは全て ① を満たす

$a=b=c$ となるものは全て (*) を満たす

a,b,c の長さの違いを考慮して、

3辺が同じものは 7通り

2辺 〃 $(9+9)\times\frac{3!}{2!}=54$通り。

3辺とも異なる長さ、 $9\times3!=54$通り。

以上まとめて 115通り。